

**RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE**  
Būvniecības fakultāte  
Transportbūvju institūts  
Ģeomātikas katedra

**Inese JANPAULE**  
Doktora studiju programmas „Būvniecība” doktorante

**AUGSTAS PRECIZITĀTES LATVIJAS  
ĢEOĪDA MODEĻA NOTEIKŠANAS  
METODES**

**Promocijas darbs**

Zinātniskais vadītājs  
Dr. phys., profesors  
**J.BALODIS**

**Rīga 2014**

UDK 528.21 (474.3) (043.2)  
Ja 598 a



Šis darbs izstrādāts ar Eiropas Sociālā fonda atbalstu projektā  
«Atbalsts RTU doktora studiju īstenošanai»

## ANOTĀCIJA

Promocijas darba mērķis bija iegūt zinātniska pētījumu rezultātus par jauna paaugstinātas precizitātes Latvijas nacionālā ģeoīda modeļa izstrādes iespējām, lietojot dažādas metodes un dažādas datu kopas – globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu, gravimetriskās, GNSS/nivelēšanas un astroģeodēziskās.

Darba uzdevumi bija: jaunāko globālo gravitācijas lauka modeļu lietošanas iespēju izpēte un analīze Latvijas nacionālā ģeoīda modeļa uzlabošanai; pētījums par Stokholmas Karaliskā Tehnoloģiju institūta (KTH) modificētās Stoksa formulas gravimetriskās metodes lietošanu Latvijas apstākļiem un rezultātu analīze; jauna Latvijas ģeoīda modeļa izstrāde, lietojot Digitālās galīgo elementu augstuma referencvirsmas (DFHRS) metodi, rezultātu analīze; astroģeodēziskās metodes izstrāde un tās lietošanas iespēju analīze, digitālā zenītteleskopa optikas un teleskopa prototipa izstrāde, eksperimentālo vertikāles novirzes mērījumu analīze.

Promocijas darba tēmas aktualitāti raksturo plašā GNSS tehnoloģijas izmantošana mūsdienās, kā arī precīzu augstumu noteikšanas prasības, izmantojot šo tehnoloģiju. To pieprasa augstās precizitātes prasības būvniecībā, ģeodēzijā, kadastrā un citās nozarēs. Augstas precizitātes ģeoīda modelis ir svarīga komponente, lai nodrošinātu precīzu augstumu noteikšanu ar GNSS tehnoloģiju. Šobrīd plaši tiek lietots Latvijas gravimetriskais ģeoīda modelis LV'98, kura precizitāte sasniedz 6-8 centimetrus, tāpēc ir izveidojusies vajadzība pēc precīzāka ģeoīda modeļa operatīvai normālā augstuma noteikšanai.

Darbā autore apskata trīs Latvijas nacionālā ģeoīda modeļa precizēšanas metodes: KTH metodi, DFHRS metodi un astroģeodēzisko metodi. Darba autore ir apskatījusi globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu izmantošanas iespējas, kā rezultātā veikts tuvināts vertikāles noviržu aprēķins Latvijas teritorijai, izmantojot globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu datus. Izmantojot KTH metodi, izveidojusi gravimetrisko ģeoīda modeli visai Latvijas teritorijai, veikusi aprēķinus, eksperimentējot ar ievades datiem un sfēriskās integrācijas parametriem. Izmantojot KTH metodi, pamatojoties uz jaunākajiem gravimetrisko mērījumu un globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu datiem, izveidojusi gravimetrisko ģeoīda modeli Rīgas reģiona teritorijai. Izmantojot DFHRS metodi, izstrādājusi jaunu Latvijas ģeoīda modeli ar 1.6 cm vidējo kvadrātisko kļūdu. Lai lietu astroģeodēzisko ģeoīda noteikšanas metodi, ar darba autores līdzdalību izstrādāts digitālā zenītteleskopa prototips un datu apstrādes algoritms. Iesniegts un LR Patentu valdē pieņemts Latvijas patenta pieteikums par digitālā

zenītteleskopa optisko sistēmu „Katadioptriska optiska sistēma ar difrakcijas izšķiršanas spēju pa visu redzeslauku”.

Promocijas darba novitāti raksturo jauns Latvijas ģeoīda modelis ar 1.6 cm vidējo kvadrātisko kļūdu, kas ir nozīmīgi augstāka precizitāte nekā pašreiz lietošanā esošajam LV'98 ģeoīda modelim. Gravimetriskais ģeoīda modelis ar KTH metodi, izstrādāts gan visai Latvijas teritorijai, izmantojot PSRS laika digitizētus gravitācijas anomāliju datus, gan Rīgas reģionam, izmantojot Latvijas Ģeotelpiskās informācijas aģentūras aktuālākos gravimetrisko mērījumu datus. Latvijas ģeoīda modeļa precizitātes uzlabošanai izstrādāta teorija, lai lietotu digitālā zenītteleskopa vertikāles noviržu mērījumu datus. Šīs jaunākās metodes agrākos Latvijas ģeoīda modeļa aprēķinos nav izmantotas.

Aizstāvēšanai izvirzītās tēzes ir:

- 1) jauns augstas precizitātes Latvijas ģeoīda modelis;
- 2) progresīvās astroģeodēziskās metodes lietošanai paredzētais digitālā zenītteleskopa prototips un datu apstrādes algoritms;
- 3) oriģināla optiskā sistēma digitālā zenītteleskopa prototipam.

Darbā veikts nosauktās zinātniskās tēmas uzdevumu, izstrādes gaitas, mērījumu, datu apstrādes, analīzes un pētījuma izvērtējuma apraksts latviešu valodā uz 127 lapām, iekļaujot 92 attēlus un 7 tabulas. Izklāsts sastāv no ievada, sešām nodaļām, secinājumiem un izmantoto informācijas avotu saraksta, kas satur 121 nosaukumu.

## ANNOTATION

The objective of the doctoral thesis was to obtain scientific research results on the possibilities to develop a higher precision geoid model of Latvia using various methods and data sets - global Earth's gravity field models, gravimetric, GNSS/levelling and astrogeodetic.

The task of the thesis was study and analysis on the possibilities of using the most recent global gravity field models for the improvement of the national geoid model of Latvia; study on the use of gravimetric method by the Royal Institute of Technology (KTH) under the conditions of Latvia and analysis of results; development of a new Latvian geoid model with the use of Digital Finite Element Height Reference Surface (DFHRS) method and analysis of results; analysis of astrogeodetic method and opportunities of its application, development of a digital zenith telescope optics and telescope prototype, analysis of experimental vertical deflection measurements.

Topicality of the thesis is characterized by the extensive use of GNSS technology, as well as accurate height determination requirements by using this technology. It is required by high accuracy standards of civil engineering, geodesy, cadastre and other industrial fields. High precision geoid model is an important component to provide an accurate determination of heights using GNSS technology. Currently Latvian gravimetric geoid model LV'98 is widely used and its precision reaches 6-8 centimeters, so there is a need for more accurate geoid model for the operative determination of normal heights.

In the thesis, author considers three methods of Latvian national geoid model computation: KTH method, DFHRS method and astrogeodetic method. The author of the thesis has considered possibilities of Earth's global gravity field model application, as a result approximate vertical deflection computation in Latvian territory was carried out using Earth's global gravity field model data. Using the KTH method gravimetric geoid model for the whole Latvian territory was developed, computation was made by experimenting with the input data and spherical integration parameters. Using the KTH method and latest gravimetric measurements and Earth's global gravity field model data gravimetric geoid model for Riga region was developed. Using the DFHRS method Latvian geoid model with a 1.6 cm mean square error was developed. With the participation of the author prototype of digital zenith telescope and its data processing algorithm was developed to use astrogeodetic geoid determination method. Patent application for digital zenith telescope optical system "Catadioptric optical system with diffraction resolution over the field of view" was submitted and accepted at the Patent Office of the Republic of Latvia.

Novelty of the thesis is characterized by new Latvian geoid model with 1.6 cm mean square error, which is significantly higher accuracy than currently used LV'98 geoid model. Gravimetric geoid model with KTH method for the whole Latvian territory, using digitized USSR gravity anomaly data and for the Riga region, using newest Latvian Geospatial Information Agency gravimetric measurement data. Theory for improvement of Latvian geoid model was developed to apply digital zenith telescope vertical deflection measurement data. These new methods have not been used in previous Latvian geoid model computations.

Defended propositions:

- 1) New high accuracy Latvian geoid model.
- 2) Digital zenith telescope prototype and data processing algorithm for progressive astrogeodetic method use.
- 3) Original optical system for digital zenith telescope prototype.

In the thesis, description of tasks, course of development, measurements, data processing, analysis and research assessment of the above-mentioned scientific subject is given in Latvian on 127 pages, 92 figures and 7 tables. Thesis consists of six chapters, conclusion and used information sources list consisting of 121 entries.

## SATURS

|  |    |
|--|----|
| ANOTĀCIJA.....   | 2  |
| SATURS.....  | 6  |
| IEVADS .....   | 8  |
| 1. GLOBĀLIE ZEMES GRAVITĀCIJAS LAUKA MODEĻI.....   | 14 |
| 1.1. Ikmēneša gravitācijas lauka izmaiņas.....   | 14 |
| 1.2. Vertikāles novirzes no globālajiem gravitācijas lauka modeļiem .....                          | 17 |
| 1.3. Apraušanas funkcijas un to efekts .....   | 20 |
| 1.4. Molodenska un Helmerta vertikāles novirzes.....   | 24 |
| 2. KTH ĢEOĪDA APRĒĶINU METODE.....   | 27 |
| 2.1. Ģeoīda formas noteikšana, izmantojot Stoksa formulu .....                                     | 27 |
| 2.2. Stoksa formulas modificēšana .....  | 29 |
| 2.3. Signālu un trokšņu pakāpes variācijas .....   | 33 |
| 2.4. Papildus korekcijas KTH pieejā.....   | 34 |
| 2.5. Ģeoīda modeļa aprēķins Latvijas teritorijai, izmantojot <i>KTH-Geolab</i> programmatūru ..... | 37 |
| 2.6. Latvijas ģeoīda modeļa LV'98 salīdzinājums ar KTH un GGM.....                                 | 42 |
| 2.7. Rīgas rajona ģeoīda modeļa aprēķins .....   | 43 |
| 3. DFHRS ĢEOĪDA APRĒĶINU METODE.....   | 47 |
| 3.1. Latvijas ģeoīda modeļa izstrāde.....  | 50 |
| 3.2. Ģeoīda aprēķina rezultāti un salīdzinājums ar EGG97 un citiem GGM .....                       | 52 |
| 3.3. Kvalitātes kontrole .....   | 57 |
| 4. ASTROĢEODĒZISKĀS METODES.....   | 60 |
| 4.1. Gravitācijas lauka anomālijas, ģeoīda ondulācijas un vertikāles novirzes .....                | 60 |
| 4.2. Helmerta vertikāles noviržu noteikšanas pamatprincipi.....                                    | 62 |
| 4.3. Vertikāles noviržu aprēķins, lietojot Meinesza formulu.....                                   | 63 |
| 4.4. Astroģeodēziska ģeoīda noteikšana .....   | 65 |
| 4.5. Lokālā astroģeodēziskā sākuma noteikšana .....  | 66 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.6. Svērtieniskās līnijas izlieces korekcija.....                                 | 68  |
| 4.7. Astroģeodēziskā ģeoīda augstumu tīkli .....                                   | 69  |
| 4.8. Vertikāles nolieces interpolācija .....                                       | 70  |
| 4.9. Astronomiskā nivelēšana .....   | 71  |
| 5. DIGITĀLO ZENĪTTELESKOPU UZBŪVES PAMATPRINCIPI .....                             | 73  |
| 5.1. Digitālo zenītteleskopu attīstība Eiropā pēdējās desmitgadēs .....            | 74  |
| 5.2. Digitālo zenītteleskopu tehniskie, optikas un elektronikas pamatprincipi..... | 78  |
| 5.3. Digitālo zenītteleskopu programmatūras pamatprincipi.....                     | 80  |
| 6. DIGITĀLĀ ZENĪTTELESKOPA MONTĀŽAS MODELIS.....                                   | 85  |
| 6.1. Digitālā zenītteleskopa konstrukcija .....                                    | 85  |
| 6.2. Datu modelis .....  | 88  |
| 6.3. Programmatūra.....  | 96  |
| 6.4. Zenītteleskopa novērojumu analīze .....                                       | 96  |
| SECINĀJUMI .....   | 116 |
| IZMANTOTĀS LITERATŪRAS SARAKSTS .....  | 118 |



## IEVADS

Promocijas darba mērķis ir iegūt zinātnisku pētījumu rezultātus par jauna paaugstinātas precizitātes Latvijas nacionālā ģeoīda modeļa izstrādes iespējām, lietojot dažādas metodes un dažādas datu kopas – globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu, gravimetriskās, GNSS/nivelēšanas un astroģeodēziskās.

Lai sasniegtu darba mērķi, ir izvirzīti šādi darba uzdevumi:

- 1) jaunāko globālo gravitācijas lauka modeļu lietošanas iespēju izpēte un analīze Latvijas nacionālā ģeoīda modeļa uzlabošanai;
- 2) pētījums par Stokholmas Karaliskā Tehnoloģiju institūta (KTH) gravimetriskās metodes izmantošanu Latvijas apstākļiem un rezultātu analīze;
- 3) jauna Latvijas ģeoīda modeļa izstrāde, lietojot Digitālās galīgo elementu augstuma referencvirsmas (DFHRS) metodi, rezultātu analīze;
- 4) astroģeodēziskā metode un tās lietošanas iespēju analīze. Digitālā zenītteleskopa optikas un teleskopa prototipa izstrāde. Eksperimentālo vertikāles novirzes mērījumu analīze.

### **Promocijas darba aktualitāte un praktiskā vērtība**

Mūsdienās daudzās inženiertehnisko darbu un zinātnisko pētījumu nozarēs nepieciešama precīzo koordinātu noteikšana, tāpēc lielu nozīmi ieņem GNSS (Globālās navigācijas satelītu sistēmas) pozicionēšanas tehnoloģiju lietošana. Visās attīstītās pasaules valstīs ir izveidoti un tiek pastāvīgi uzlaboti augstas precizitātes uz zemes bāzētie globālie un reģionālie GNSS palīgsistēmu tīkli. Arī Latvijā ir izveidoti LATPOS un EUPOS<sup>®</sup>-Rīga GNSS atbalsta sistēmu tīkli. Bet, tā kā GNSS pozicionēšanas metodes nodrošina tikai augstumu komponentes  $h$  noteikšanu virs elipsoīda, bet tradicionāli lieto augstumu sistēmu virs pieņemtā vidējā jūras līmeņa, kas attēlo arī gravitācijas spēka atskaites sistēmas līmenisko virsmu, tad ir nepieciešams iegūt arī augstas precizitātes normālos augstumus  $H$ . Ģeodēzijā ir izveidoti augstas precizitātes normālo augstumu  $H$  atbalsta tīkli, kas iegūti ļoti rūpīga un darbietilpīga nivelēšanas procesa ceļā. GNSS pozicionēšanas metodes dod ļoti ātri iegūstamu koordinātu rezultātu, bet augstuma komponente nav saistīta ar vidējo jūras līmeni un vietējo gravitācijas lauku. Lai GNSS mērījumu rezultātā noteiktu normālo augstumu, ir nepieciešams veikt elipsoidālo augstumu  $h$  transformāciju uz normālo augstumu virs jūras līmeņa  $H = h - N$ , t.i. virs ģeoīda ( $N$  – dotās vietas ģeoīda augstums virs elipsoīda). Lai sasniegtu augstu normālā augstuma noteikšanas precizitāti, rodas nepieciešamība pēc augstas precizitātes ģeoīda modeļa. Ģeoīds ir gravitācijas lauka ekvipotenciāla virsma. Šo virsmu var vizualizēt kā okeānu virsmu miera stāvoklī, turpinātu zem kontinentiem, tādā veidā identificējot Zemes

matemātisko vienāda zemes pievilkšanas spēka figūru – ģeoīdu. Promocijas darbā ir izmantots termins "ģeoīds" - Zemes gravitācijas lauka ekvipotenciāla virsma, kurā Zemes pievilkšanas spēks ir ar vienādu skaitlisko vērtību. Teorijā lieto terminu "kvaziģeoīds", apzīmējot Zemes gravitācijas lauka ekvipotenciālo virsmu, no kuras tiek atskaitīti nivelēšanas procesā iegūtie "normālie augstumi" [98]. Terminu "ģeoīds" bieži lieto, kad ģeoīda un kvaziģeoīda virsmas praktiski sakrīt. Arī Latvijas gadījumā izejas datu kopas apjoms un precizitāte nedod iespēju aprēķināt tos dažus mikronus vai milimetrus, kas atdala ģeoīdu no kvaziģeoīda. Praktiski ģeoīda un kvaziģeoīda atšķirība parādās augstkalnu valstīs, kur ir atšķirīgas normālā un ortometriskā augstuma vērtības.

Šobrīd Latvijas gravimetriskā ģeoīda modeļa LV'98 precizitāte sasniedz 6-8 centimetrus [56]. Šo modeli ir izveidojis Dr. Jānis Kaminskis, izmantojot PSRS laiku kartēs attēlotos gravimetrisko mērījumu datus un Dānijā izstrādātajā programmatūrā lietoto metodi. Tas bija ļoti nozīmīgs sasniegums Latvijas ģeodēzijai, jo tas ir pirmais un līdz šim vienīgais oficiālais Latvijas ģeoīda modelis. Tomēr līdz ar GNSS metodes lietošanas masveidību Latvijas tautsaimniecībā izvirzās jauni uzdevumi un jaunas precizitātes prasības. Kopš LV'98 izveides ir pagājuši 15 gadi, un šī Latvijas ģeoīda modeļa precizitāte vairs nav adekvāta GNSS mērījumu precizitātei un plašo pielietojumu masveidībai. Ir izveidojusies vajadzība pēc precīzāka ģeoīda modeļa operatīvai normālā augstuma noteikšanai, lietojot precīzās GNSS koordinātu noteikšanas metodes. To pieprasa augstās precizitātes prasības būvniecībā, ģeodēzijā, kadastrā un citās nozarēs. Attīstītajās valstīs ģeoīda modeļu uzlabošana notiek regulāri, piemēram, Amerikas Savienotajās Valstīs ik pēc 3 gadiem tiek noteikts jauns ģeoīda modelis. Arī pārējās Baltijas valstīs vietējo ģeoīda modeļu tālāka uzlabošana ir vērtēta kā aktuāls uzdevums [12] [13] [53] [55] [80] [83]. Arī kopējai Baltijas ģeoīda veidošanai būtiska ir Baltijas valstu augstuma sistēmu sasaiste [4], taču katrai no tām ir nepieciešams augstvērtīgs ģeoīda modelis. Arī, lai tuvinātos Eiropas Vertikālās atbalsta sistēmas (EVRS) prasībām, precīzs ģeoīda modelis ir ļoti aktuāls. Jau šobrīd norisinās Latvijas augstumu sistēmas pāreja no BAS-77 (Baltijas Augstumu sistēma) uz EVRS2007 sistēmu [117].

Pēdējo gadu NASA un ESA zinātnisko Zemes gravitācijas lauka pētījumu rezultātā ir izstrādāti jauni globālā Zemes gravitācijas lauka modeļi. Nacionālo ģeoīda modeļu izveidei lietoti gan gravitācijas satelītu misiju (GRACE, GOCE u.c) dati, gan uz Zemes veikto gravimetrisko mērījumu dati, bet dažās valstīs arī ar astroģeodēziskām metodēm noteiktās vertikāles novirzes. Astroģeodēziskie dati dod iespēju ģeoīda modeļa kontrolei un detalizētai precizēšanai. Aprēķinot Baltijas valstu kvaziģeoīdu, šo ideju veicinājis Jäger et al [50]. Liela

apjoma gravimetriskos mērījumus ir izpildījusi Latvijas Ģeotelpiskās Informācijas aģentūra (LGIA), tomēr vēl ir nepieciešams ļoti liels mērījumu apjoms aptuveni 25% valsts teritorijā. Jaunā gravimetriskā ģeoīda modeļa uzlabojumi LGIA vēl nav veikti.

Astroģeodēziskās metodes ir pazīstamas jau kopš 20. gadsimta vidus, tomēr sākotnēji tās neguva plašu atzinību, jo augstvērtīgu datu ieguve un apstrāde bija lēns un darbietilpīgs process. Pēdējās desmitgadēs, parādoties lādiņsaites matricas (CCD) attēlu iegūšanas tehnoloģijām, šīs metodes ir aktualizējušās. Šveices un Vācijas kopdarbā ir veikti sekmīgi pētījumi, ka, pateicoties jaunajām attēlu iegūšanas metodēm un jaunizveidotajiem milzīga apjoma kosmiskās ieguves zvaigžņu katalogiem, astroģeodēziskās metodes dod ātrāku rezultātu ar mazāku mērījumu skaitu, nekā gravimetriskās metodes [32] [36] [37] [38]. Lai šīs metodes izmantotu un izvērstu astroģeodēzisko vertikāles noviržu mērījumus Latvijas ģeoīda precizitātes uzlabošanai, būtu nepieciešams veikt vertikāles novirzes mērījumus arī Latvijas teritorijā. Lai gan vertikāles novirzes mērījumu apjoms būtu ievērojami mazāks par gravimetrisko mērījumu apjomu, tomēr arī šo darbu veikšanai nepieciešami finansiālie resursi, auto transports un ekspedīcijas pa visu valsts teritoriju. Šo iemeslu dēļ promocijas darbā ir ietverti tikai zenītteleskopa izstrādes jautājumu un vertikāles novirzes eksperimentālo mērījumu analīze.

Darba pirmajā nodaļā apskatīti globālie Zemes gravitācijas lauka modeļi un daži no tiem (Aiub-Grace01s, Aiub-Grace02s) izmantoti vertikāles noviržu komponentu aprēķiniem Latvijas teritorijā. Izpētītas sfēriskās harmonikas koeficientu apraušanas funkcijas un to ietekme uz vertikāles noviržu aprēķiniem. Veikti aprēķini korekcijām, kas nepieciešamas, lai transformētu Molodenska vertikāles novirzes uz Helmerta jeb astroģeodēziskajām vertikāles novirzēm. Molodenska vertikāles novirzes iegūst no globālo gravitācijas lauka modeļu sfēriskās harmonikas koeficientiem, savukārt astroģeodēzisko novērojumu rezultātā iegūst Helmerta vertikāles novirzes.

Otrajā nodaļā aprakstīta KTH ģeoīda aprēķinu metode, kas attīstīta Karaliskajā Tehnoloģiju institūtā (KTH) Stokholmā un kas balstās uz modificēto Stoksa formulu. Pateicoties iespējai izmantot šo programmatūru, kas autorei radās Erasmus prakses laikā 2011.gadā Yıldız Tehniskajā universitātē Stambulā, Turcijā, tika veikti eksperimentāli KTH metodes gravimetriskā ģeoīda aprēķini Latvijas teritorijai, sākotnēji izmantojot PSRS laika digitizētos brīvā gaisa anomāliju datus. Pateicoties sadarbības iespējai ar Latvijas Ģeotelpisko informācijas aģentūru, radās iespēja izmantot pēdējos gados veikto gravimetrisko mērījumu rezultātus Rīgas reģionam. Aprakstīts iegūtais eksperimentālais ģeoīda modelis Latvijas

teritorijai ar PSRS laiku gravitācijas anomāliju datiem un Rīgas reģionam ar LGIA mērījumu datiem.

Trešajā nodaļā aprakstīts Latvijas ģeoīda modeļa aprēķins pēc Vācijas Karlsrūhes lietišķo zinātņu universitātes izstrādātās Digitālās galīgo elementu augstuma referencvirsmas (DFHRS) metodes. Darbs ar šo metodi tika darīts kopā ar metodes autoriem Vācijas Karlsrūhes lietišķo zinātņu universitātē. Tā balstās uz īpaši precīzu globālu vai gravimetrisku ģeoīda modeļu pielāgošanu vietējai augstumu sistēmai, ko raksturo GNSS/nivelēšanas datu kopa. Šīs metodes priekšrocība ir tā, ka, variējot aprēķinu parametrus, piemēram, režģa un laukumu lielumu, ir iespējams uzlabot rezultātu pat tādā gadījumā, ja ir maz vai sliktas kvalitātes novērojumu dati. Salīdzinājumā ar Stoksa formulu, ko izmanto gravimetrisko ģeoīda modeļu aprēķinos, DFHRS programmatūrā ietverta novērojumu svarošana un statistiskie testi, kas nav iespējami Stoksa formulā, kur visi gravitācijas mērījumi un interpolācijas tiek pieņemtas ar vienādu precizitāti. Šī metode ietver arī vertikāles noviržu mērījumu integrēšanu ģeoīda modeļa aprēķinos. Apskatīti arī pieci globālie Zemes gravitācijas lauka modeļi – EGM2008, EGG97, Eigen05c, Eigen06c, GO\_CONS\_GFC\_2\_DIR\_R3, kuri tika transformēti, lai pielāgotu Latvijas augstumu sistēmai, un veikts to salīdzinājums ar pašreiz lietošanā esošo Latvijas gravimetrisko ģeoīda modeli LV'98 un izstrādāto DFHRS modeli, kā arī veikts to salīdzinājums ar autores rīcībā esošo GNSS/nivelēšanas punktu datiem.

Darba ceturtajā nodaļā teorētiski apskatīti vertikāles noviržu noteikšanas pamatprincipi, kā arī astronomiskā nivelēšana, kas nodrošina ģeoīda augstuma starpības pa profilu uz Zemes fiziskās virsmas vai uz ģeoīda, integrējot vertikāles novirzes.

Piektajā nodaļā parādīta literatūras izpēte par digitālo zenītkameru attīstību Eiropā pēdējās desmitgadēs, kā arī veikts apskats par digitālo zenītkameru uzbūves tehniskajiem, optiskajiem, elektroniskajiem un programmatūras pamatprincipiem. Literatūrā un arī promocijas darbā ar vienu un to pašu nozīmi tiek lietoti termini „zenītteleskops” un „zenītkamera”.

Sestajā nodaļā aprakstīts izstrādātā digitālā zenītteleskopa montāžas modelis, kā arī veikta pirmo digitālā zenītteleskopa novērojumu analīze Latvijā. Digitālā zenītteleskopa izstrāde uzsākta 2010.gadā Latvijas Universitātē, Ģeodēzijas un ģeoinformātikas institūtā, tā mērķis ir vertikāles noviržu noteikšana ar sagaidāmo precizitāti 0.1". Autore aktīvi piedalījās digitālā zenītteleskopa teorijas izstrādē astroģeodēzisko vertikāles noviržu mērījumu lietošanai ģeoīda modeļa aprēķinos, digitālā zenītteleskopa konstrukcijas projektēšanā,

optikas aprēķinos un testa mērījumu analīzē. Eksperimentāli novērojumi izpildīti no 2011.gada novembra līdz 2012.gada martam un to mērķis bija novērtēt optiski-mehāniskās sistēmas raksturlielumus, veikt zenīta punkta pozīcijas aprēķinus un noteikt tā precizitāti, noskaidrot novērojamo zvaigžņu raksturlielumus, veikt papildinājumus un uzlabojumus datu apstrādes programmatūrā, integrēt sistēmā attēla ekspozīcijas laika precīzas fiksācijas aprīkojumu. Tuvākajā nākotnē novērojumu daudzums varēs tikt palielināts, jo zenītteleskopa sistēmas prototips ir pabeigts un sagatavots mērījumiem.

Zinātniskie pētījumi tika veikti Rīgas Tehniskajā universitātē, Latvijas Universitātes Ģeodēzijas un ģeoinformātikas institūtā, Yıldız Tehniskajā universitātē Stambulā, Turcijā, un Vācijas Karlsruhes lietišķo zinātņu universitātē. Veiktie pētījumi tika iekļauti ziņojumos, ar kuriem kā līdzautore piedalījās *ESA Living Planet Symposium* Norvēģijā un Lielbritānijā, *General Assembly of Wegener* Turcijā, *European Geosciences Union General Assembly* Austrijā, vairākās Rīgas Tehniskās universitātes, Latvijas Universitātes un citās konferencēs. Šo konferenču laikā tika iegūtas padziļinātas zināšanas jaunākajos sasniegumos citu valstu universitātēs.

Promocijas darba rezultāti sniegti secinājumos.

#### **Promocijas darba zinātniskā novitāte**

Radīts jauns Latvijas ģeoīda modelis ar 1.6 cm vidējo kvadrātisko kļūdu, kas ir nozīmīgi augstāka precizitāte. Ar to pierādīts, ka DFHRS metode dod labākos rezultātus. Paplašinot DGNSS mērījumu piesaisti visam 1.klases nivelēšanas tīklam, rodas reālas iespējas paaugstināt Latvijas ģeoīda modeļa precizitāti.

Gravimetriskais ģeoīda modelis ar KTH metodi uzrāda zemākas precizitātes rezultātus gan visai Latvijas teritorijai, izmantojot PSRS laika digitizētus gravitācijas anomāliju datus, gan Rīgas reģionam, izmantojot Latvijas Ģeotelpiskās informācijas aģentūras aktuālākos gravimetrisko mērījumu datus. Jāsecina, ka gravimetrisko mērījumu blīvums Latvijā vēl nav pietiekošs.

Latvijas ģeoīda modeļa precizitātes uzlabošanai ar astroģeodēzisko metodi pirmo reizi tiks izmantoti digitālā zenītteleskopa vertikāles noviržu mērījumu dati. Šie dati tiks izmantoti, līdz ko tiks iegūts minimāls digitālā zenītteleskopa mērījumu datu daudzums. Šīs jaunākās metodes agrākos Latvijas ģeoīda modeļa aprēķinos nav izmantotas.

**Promocijas darba rezultātā:**

- 1) izmantojot DFHRS metodi, izstrādāts jauns Latvijas ģeoīda modelis ar 1.6 cm vidējo kvadrātisko kļūdu;
- 2) apskatītas globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu lietošanas iespējas, kā rezultātā veikts vertikāles noviržu aprēķins Latvijas teritorijai, izmantojot globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu datus;
- 3) izmantojot KTH metodi, izveidots gravimetriskais ģeoīda modelis visai Latvijas teritorijai, veikti aprēķini, eksperimentējot ar ievades datiem un parametriem;
- 4) izmantojot KTH metodi, pamatojoties uz jaunākajiem gravimetrisko mērījumu un globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu datiem, izveidots gravimetriskais ģeoīda modelis Rīgas reģiona teritorijai;
- 5) izstrādāts digitālā zenītteleskopa prototips un datu apstrādes algoritms;
- 6) izstrādātā oriģinālā optikas shēma zenītteleskopa prototipam nodrošina difrakcijas izšķiršanas spēju pa visu redzeslauku.

**Aizstāvēšanai izvirzītās tēzes:**

- 1) jauns augstas precizitātes Latvijas ģeoīda modelis;
- 2) progresīvās astroģeodēziskās metodes lietošanai paredzētais digitālā zenītteleskopa prototips un datu apstrādes algoritms;
- 3) oriģināla optiskā sistēma digitālā zenītteleskopa prototipam.

# 1. GLOBĀLIE ZEMES GRAVITĀCIJAS LAUKA MODEĻI

Nesenie satelītu misiju sasniegumi ir devuši plašākas un precīzākas zināšanas par Zemes gravitācijas lauku, tāpēc globālie Zemes gravitācijas lauka modeļi (GGM), kas ataino Zemes gravitācijas lauka struktūru, ir ieguvuši lielu nozīmi ģeozinātnēs. Tie tiek lietoti arī nacionālu un reģionālu ģeoīdu aprēķinos, kuri tiek papildināti ar lokāli veiktu mērījumu datiem. GGM iedalās ilglaicīgajos modeļos, ko izmanto arī ģeoīda aprēķinos, un īslaicīgajos modeļos, ko izmanto gravitācijas lauka izmaiņu izpētei. GGM dod iespēju tos savstarpēji kombinēt, piemēram, aizstājot liela viļņa garuma informāciju vienā modelī ar cita modeļa liela viļņa garuma informāciju [19].

## 1.1. Ikmēneša gravitācijas lauka izmaiņas

Ar GRACE satelītu novērotās ikmēneša izmaiņas Zemes gravitācijas laukā izraisa īslaicīgas izmaiņas masas blīvumā. Lielu daļu no šīm ikmēneša gravitācijas izmaiņām izraisa izmaiņas ūdens daudzumā hidroloģiskos rezervuāros: upēs, ezeros, pazemes ūdeņos, okeānos, atmosfēras un kriosfēras masās, kā arī ūdens apmaiņa starp šiem rezervuāriem. Virsmas masas blīvuma variācijas var izteikt kā summu no sfēriskās harmonijas koeficientu izmaiņām, pieņemot, ka šīs variācijas var attiecināt uz ļoti plānu ūdens slāni, kas noklāj Zemes virsmu [103]. Virsmas blīvuma variācijas izteiktas no sfēriskās harmonijas koeficientu variācijām

$$\Delta\sigma(\varphi, \lambda) = \sum_{n=Nmin}^{Nmax} \sum_{m=0}^l (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) W_n K_n \bar{P}_{nm}(\cos \varphi), \quad (1.1)$$

kur  $\varphi, \lambda$  ir platums un garums,  $C_{nm}, S_{nm}$  ir sfēriskās harmonijas (jeb Stoksa) koeficienti,  $n, m$  attiecīgi ir pakāpe un kārta,  $\bar{P}_{nm}(\cos \varphi)$  ir pilnās normalizētās saistītās Legendre funkcijas,  $W_n$  ir svītru filtra koeficienti un

$$K_n = \frac{R\rho_{ave}(2l+1)}{3(1+k_n)}, \quad (1.2)$$

kur  $R$  ir referencilipsoīda galvenā ass,  $\rho_{ave}$  ir Zemes vidējais blīvums ( $5517 \text{ kg/m}^3$ ) un  $k_n$  ir no pakāpes atkarīgie Lova skaitļi [17] [103]. Faktors  $(1+k_l)$  vienādojumā (1.2) ņem vērā gan tiešo masas potenciālu, gan cietās Zemes deformācijas potenciālu.

Tas noved līdz variācijām ekvivalentajā ūdens daudzumā (*equivalent water thickness*):

$$EWT = \frac{\Delta\sigma}{\rho_w}, \quad (1.3)$$

kur  $\rho_w$  ir ūdens blīvums, pieņemts, ka tas ir vienāds ar  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Ekvivalents ūdens daudzums ir vertikālas izmaiņas, tas tiek mērīts centimetros, kas ir daudz mazāks lielums, nekā Zemes rādiuss vai arī horizontālās izmaiņas, kas mērāmas kilometros [65].

Ikmēneša masas izmaiņas okeāniem un sauszemei ir iegūtas no GRACE sfēriskās harmonijas risinājumiem, šos GRACE sauszemes datu produktus izstrādā Kosmiskās Izpētes Centrs (*The Center for Space Research, The University of Texas at Austin*) un tie tika izmantoti, lai novērtētu ikmēneša ekvivalentā ūdens daudzuma izmaiņas Turcijā laika periodā no 2007. gada janvāra līdz 2009. gada decembrim.

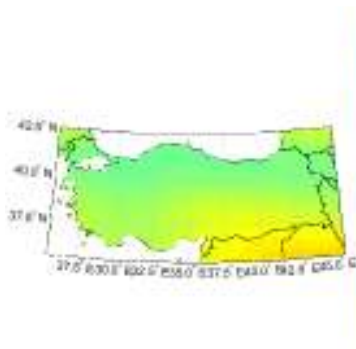
Dati ir pieejami NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) POET interaktīvajā pārlūkā [119]. Dati ietver pēc-ledus laikmeta deformāciju (PGR - *Post-Glacial Rebound*) korekciju. Ekvivalentā ūdens daudzuma izmaiņas iegūst, aprēķinot starpību starp ikmēneša ekvivalento ūdens daudzumu un 5 gadu (2003-2007) vidējo vērtību. Vidējā vērtība iegūta kā aritmētiskais vidējais. GRACE datiem lietots svītru filtrs, lai samazinātu kļūdu ietekmi, kuru signāli ir ziemeļu-dienvidu virzienā orientētas svītras GRACE ikmēneša risinājumos. Telpiskā izšķirtspēja ir  $1^\circ$ , datiem izmantota arī Gausa izlīdzināšana, ar izlīdzināšanas rādiusu 300 km.

Kā jau iepriekš minēts, POET interaktīvajā pārlūkā pieejamie dati ir laboti ar PGR modeli. Atmosfēras masas datu apstrādes gaitā ir izslēgtas, izmantojot ECMWF (*European Centre for Medium-Range Weather Forecasts*) datus, tā ka pārlūkā pieejamie dati neattiecas atmosfēras izmaiņas virs sauszemes un kontinentālajiem ledājiem (Grenlande, Antarktika). Okeāna modeli izmanto, lai izslēgtu augstas frekvences okeāna kustības, kuras izraisa vējš un gaisa spiediens. Gala rezultātā, ja okeāna modelis būtu ideāls, gravitācijas lauks neatīnās okeānu mainīgumu. Lai izmantotu šos rezultātus virs okeāniem, POET pārlūkā dati virs okeāniem un sauszemes ir pieejami atsevišķi.

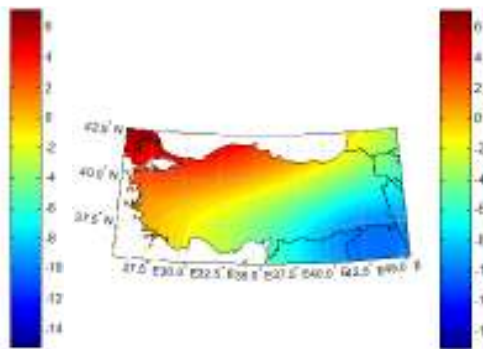
Kļūdu avots, kuru raksturo ziemeļu-dienvidu virzienā izkārtotas svītras, pēc modeļu izmantošanas datus vēl joprojām pastāv. Swenson un Wahr [96] novēroja raksturīgu īpašību, kas saista sfēriskās harmonijas koeficientus ar svītrām, un izveidoja filtru grupu šīs problēmas novēršanai. Tā kā gravitācijas lauks pavājinās līdz ar augstumu, īso viļņu garumu signāli



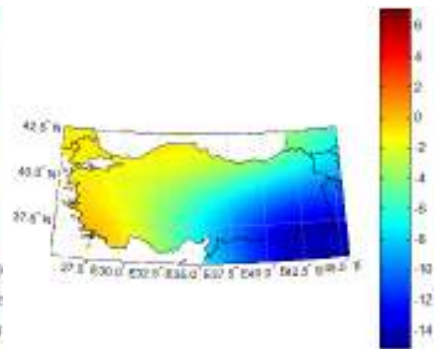
samazinās straujāk nekā garo viļņa garumu signāli. GRACE satelīts lido apmēram 400 km augstumā, tāpēc GRACE gravitācijas laukam nepieciešama izlīdzināšana, lai samazinātu kļūdas īso viļņa garumu komponentēs. Ir nepieciešams izlīdzināt īsos viļņa garumus, lai atgūtu masu kopumu uz Zemes virsmas, kas izraisa gravitācijas lauku, kuru novēro GRACE savā orbītā. Lai to izdarītu, tiek lietota Gausa izlīdzināšanas metode [95] [96] [103].



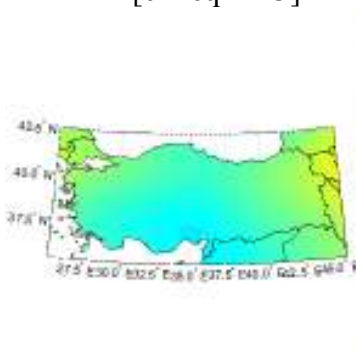
1.1.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2007.01 [cm eq H2O]



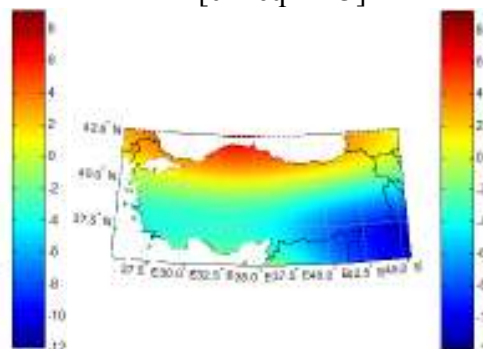
1.2.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2008.01 [cm eq H2O]



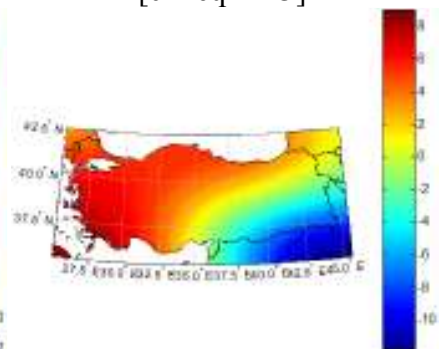
1.3.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2009.01 [cm eq H2O]



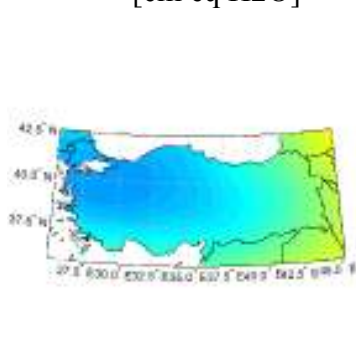
1.4.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2007.06 [cm eq H2O]



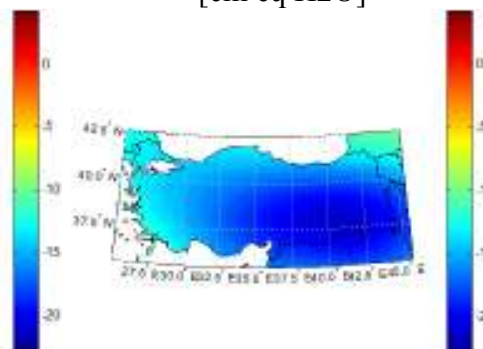
1.5.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2008.06 [cm eq H2O]



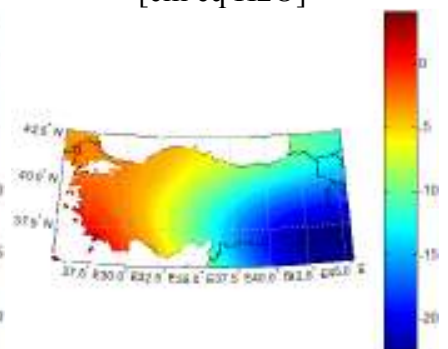
1.6.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2009.06 [cm eq H2O]



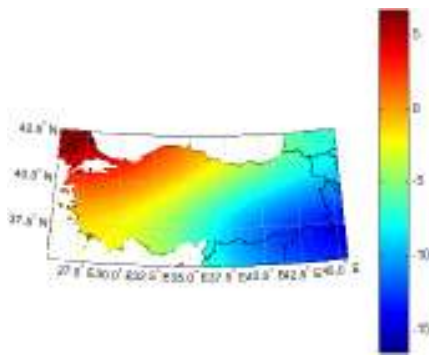
1.7.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2007.09 [cm eq H2O]



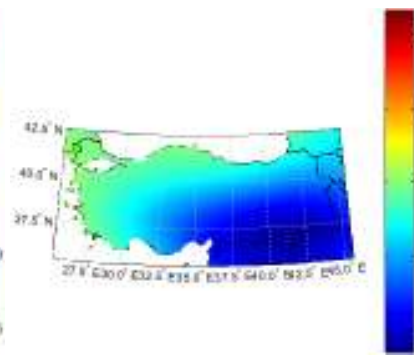
1.8.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2008.09 [cm eq H2O]



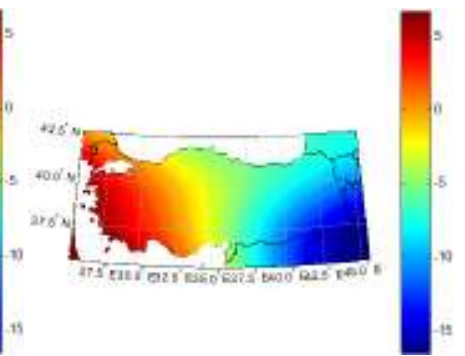
1.9.att. Ekvivalentsais ūdens daudzums 2009.09 [cm eq H2O]



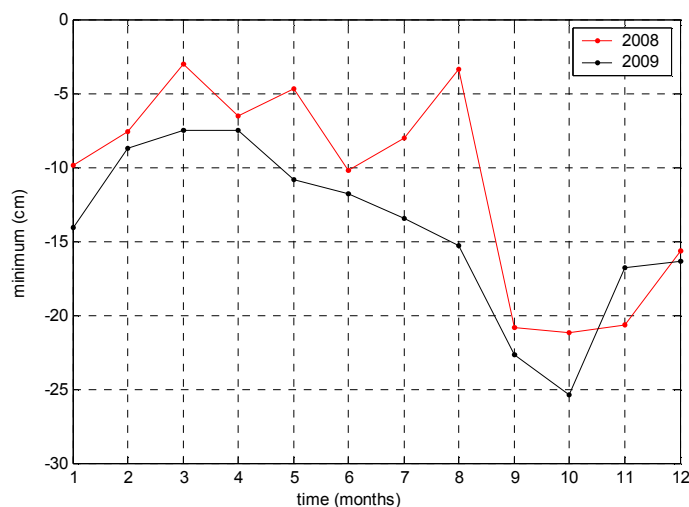
1.10.att. Ekvivalentais ūdens daudzums 2007.12 [cm eq H<sub>2</sub>O]



1.11.att. Ekvivalentais ūdens daudzums 2008.12 [cm eq H<sub>2</sub>O]



1.12.att. Ekvivalentais ūdens daudzums 2009.12 [cm eq H<sub>2</sub>O]



1.13.att. Ekvivalentā ūdens daudzuma minimālās vērtības izvēlētajā reģionā, 2008. un 2009. gads. [cm eq H<sub>2</sub>O]

Pēc GRACE sauszemes datu lejupielādes no POET interaktīvā pārlūka [119] tika izmantota MATLAB programma, lai interpolētu un vizualizētu iegūtos datus. Lietotāja definētais reģions ir: platums 35°-43°N, garums 25°-46°E. Iespējams novērot lielu negatīvu anomāliju Turcijas DA daļā, sākot ar 2007.gada oktobri līdz pat novērotā perioda beigām.

1.1.-1.12. attēlos redzams ekvivalentais ūdens daudzums izvēlētajā reģionā 2007. – 2009. gada janvārim jūnijam, septembrim un decembrim. 1.13. attēlā atainots izvēlētajā reģionā novērotās negatīvās anomālijas sezonālais raksturs, kuru var skaidrot ar reģionā raksturīgajiem sausuma periodiem.

## 1.2. Vertikāles novirzes no globālajiem gravitācijas lauka modeļiem

Vertikāles novirzes austrumu-rietumu komponente [61]

$$\eta(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{a\gamma r \sin \varphi} \sum_{n=2}^{Nmax} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} m(\bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (1.4)$$

un ziemeļu-dienvidu komponente [61]

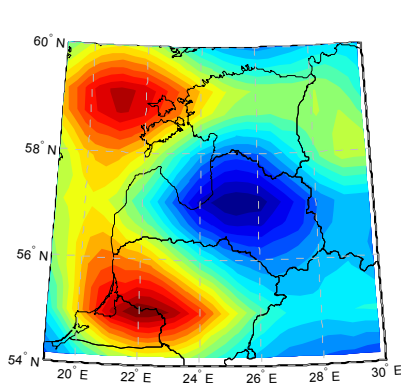
$$\xi(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{a\gamma^2} \sum_{n=2}^{Nmax} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \times \left[ \gamma \sqrt{(n-m)(n+m-1)(1+\delta_m)} \bar{P}_{n,m+1}(\sin \varphi) - \left( \gamma m \tan \varphi - \frac{d\gamma}{d\varphi} \right) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right], \quad (1.5)$$

kur

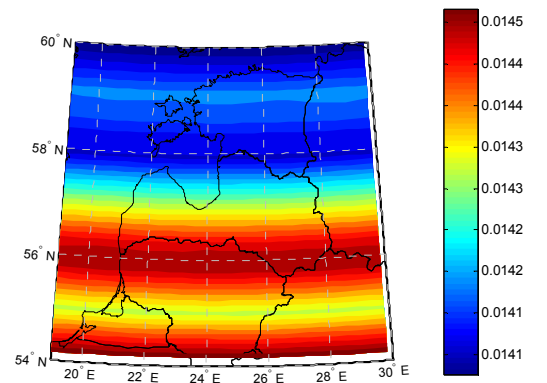
$$\frac{d\gamma_0}{d\varphi} = \frac{\gamma_a \cos \varphi \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} (2k + e^2(1 - k \sin^2 \varphi)), \quad (1.6)$$

un  $(r, \varphi, \lambda)$  ir ģeocentriskais attālums, platums un garums,  $GM$  ir gravitācijas konstante un Zemes masa,  $a$  ir referencilipsoīda lielās pusass garums,  $\gamma_0$  ir normālā gravitācija attiecīgajos platuma grādos,  $\gamma_a$  ir normālā gravitācija virs ekvatora,  $e^2$  ir referencilipsoīda primārā ekscentritāte,  $k$  ir formulas konstante  $k=0.001931851353$ ,  $\delta$  atbilst Kroneckera deltaī.

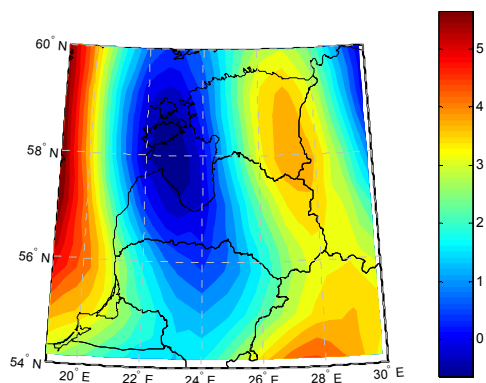
Tā kā jebkura Zemes globālā gravitācijas lauka modeļa sfēriskās harmonijas koeficienti tiek nodrošināti ar to standartnovirzēm, tad, izmantojot kļūdu izplatīšanās teoriju, iespējams vienkārši aprēķināt jebkuras gravitācijas lauku raksturojošas komponentes standartnovirzes.



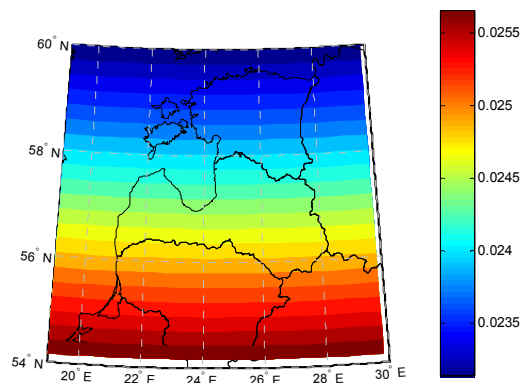
1.14.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponente (n=90) [loka s]



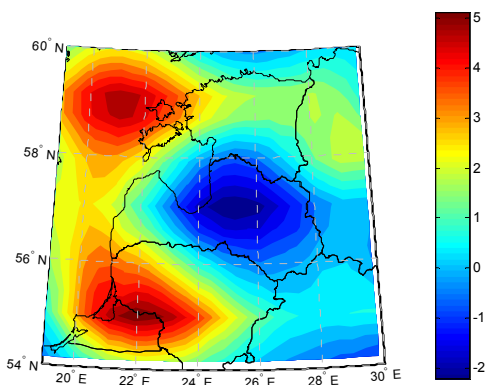
1.15.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponentes standartnovirzes [loka s]



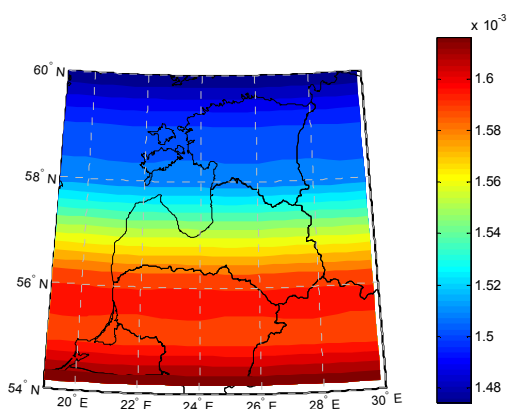
1.16.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes AR komponente (n=90) [loka s]



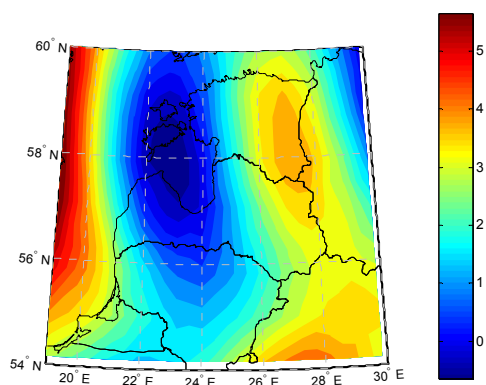
1.17.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes AR komponentes standartnovirzes [loka s]



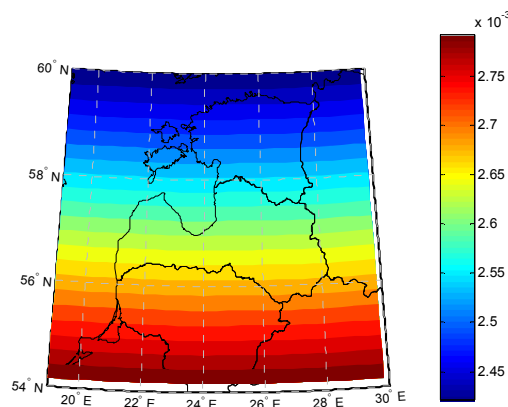
1.18.att. Aiub-Grace02s GGM vertikāles novirzes ZD komponente (n=90) [loka s]



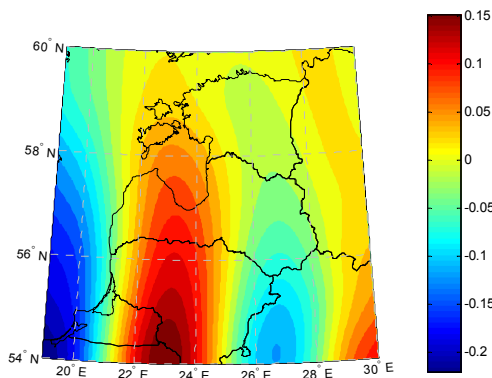
1.19.att. Aiub-Grace02s GGM vertikāles novirzes ZD komponentes standartnovirzes [loka s]



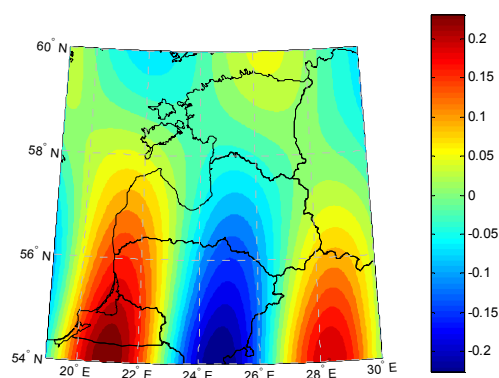
1.20.att. Aiub-Grace02s GGM vertikāles novirzes AR komponente (n=90) [loka s]



1.21.att. Aiub-Grace02s GGM vertikāles novirzes AR komponentes standartnovirzes [loka s]



1.22.att. Atšķirība starp Aiub-grace01s un Aiub-Grace02s GGM vertikāles noviržu ZD komponentēm ( $n=90$ ) [loka s]



1.23.att. Atšķirība starp Aiub-grace01s un Aiub-Grace02s GGM vertikāles noviržu AR komponentēm ( $n=90$ ) [loka s]

Apskatīti piemēri vertikāles noviržu aprēķinam Baltijas valstu teritorijā no globālajiem gravitācijas lauka modeļiem. 1.14.-1.17. attēlos redzamas Aiub-Grace01s [46] [68] [121] globālā gravitācijas lauka modeļa, ar apraušanas robežu  $n = 90$ , vertikāles novirzes ziemeļu-dienvidu un austrumu-rietumu komponentes un to standartnovirzes Baltijas valstu teritorijā. 1.18.-1.21. attēlos redzamas Aiub-Grace02s [45] globālā gravitācijas lauka modeļa vertikāles novirzes ziemeļu-dienvidu un austrumu-rietumu komponentes un to standartnovirzes šim pašam reģionam. Vertikāles novirzes šim reģionam mainās apmēram no  $-2$  līdz  $+5$  loka sekundēm un abu modeļu kartes dod līdzīgus rezultātus. Aiub-Grace01s modeļa standartnovirzes vertikāles novirzes ZD komponentei svārstās starp  $0.0141$  un  $0.0145$  loka sekundēm, AR komponentei – starp  $0.0235$  un  $0.0255$  loka sekundēm. Aiub-Grace02s modeļa standartnovirzes vertikāles novirzes ZD komponentei svārstās starp  $0.00148$  un  $0.00160$  loka sekundēm, AR komponentei – starp  $0.00245$  un  $0.00275$  loka sekundēm. Tātad Aiub-Grace02s globālā gravitācijas lauka modeļa standartnovirzes ir aptuveni 10 reizes zemākas nekā Aiub-Grace01s modelim. 1.22. un 1.23. attēlos redzamas aprēķinātās starpības starp šiem abiem modeļiem, abām komponentēm tās svārstās robežās apmēram no  $-0.2$  līdz  $+0.2$  loka sekundēm.

### 1.3. Apraušanas funkcijas un to efekts

Sfēriskās harmonijas koeficienti ataino Zemes gravitācijas lauka globālo struktūru un neregularitātes. Augstāku grādu koeficienti atbilst augstākai telpiskai izšķirtspējai. Realitātē gravitācijas lauku nevar noteikt ar neierobežotu telpisko izšķirtspēju. Tādēļ aprēķinos nepieciešams ieviest noteiktu sfēriskās harmonijas koeficientu pakāpes robežu jeb apraušanas robežu. Maksimālais grādu skaits  $n_{max}$  sasaucas ar telpisko izšķirtspēju uz Zemes virsmas kā

$$\lambda_{min} \approx 40000km/(n_{max} + 0.5) \quad (1.7)$$

kur  $\lambda_{min}$  ir gravitācijas lauka īpatnību minimālais viļņa garums [65].

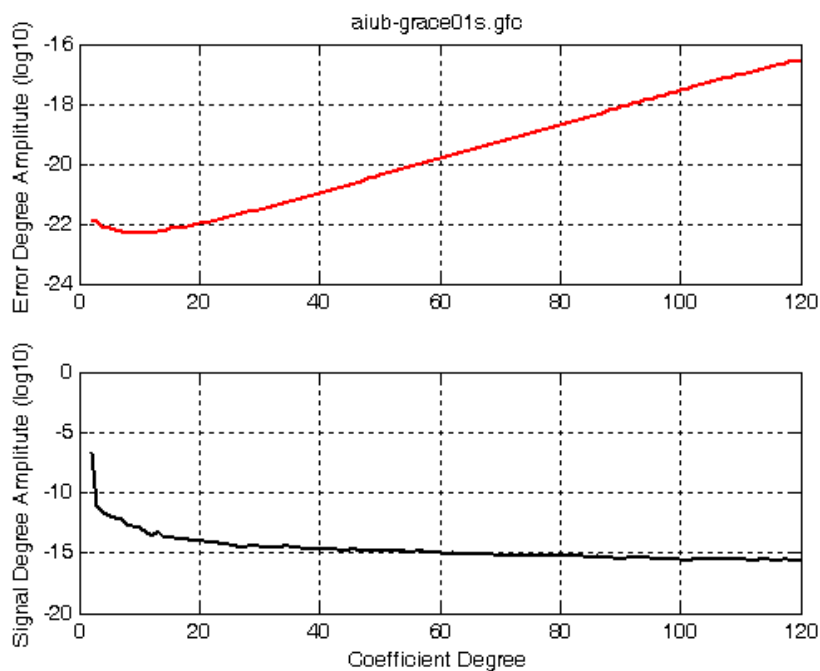
Tomēr augstāku grādu koeficienti ne tikai nodrošina augstāku izšķirtspēju, to precizitāte ir daudz zemāka. Tāpēc ir vispārpieņemts katru gravitācijas lauka risinājumu, kas izteikts ar sfēriskās harmonijas koeficientiem  $(S_{nm}, C_{nm})$ , nodrošina arī ar tos raksturojošām standartnovirzēm  $(\sigma_{S_{nm}}, \sigma_{C_{nm}})$ , kuras iegūst izmantojot kļūdu izplatīšanās likumu. Gravitācijas signālu amplitūdas  $\sigma$  var definēt sekojoši [65]

$$\sigma = \sqrt{\sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2)}, \quad (1.8)$$

un kļūdu amplitūdas var definēt līdzīgi

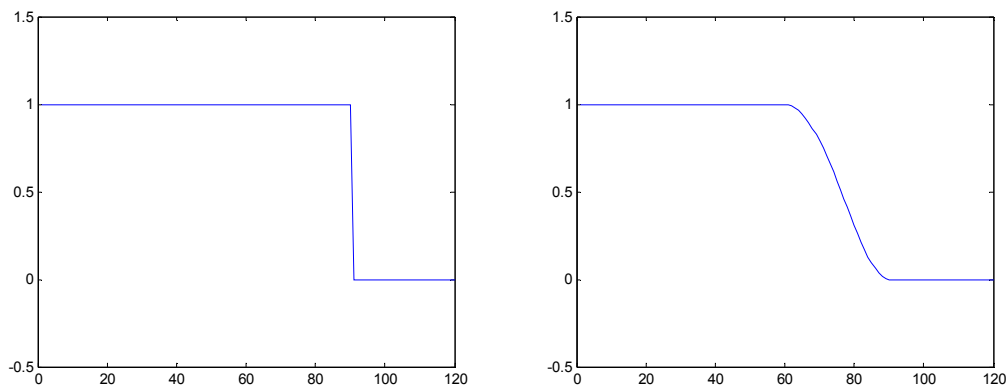
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{m=0}^n (\sigma_{C_{nm}}^2 + \sigma_{S_{nm}}^2)}. \quad (1.9)$$

Šādi var raksturot globālos gravitācijas lauka modeļus gan no telpiskās izšķirtspējas, gan no precizitātes aspekta.



1.24.att. Aiub-Grace01s globālā gravitācijas lauka modeļa kļūdu un signālu amplitūdas

1.24. attēlā redzam kā Aiub-Grace01s modelī ar  $n_{max} = 120$ , augstāku grādu sfēriskās harmonijas koeficientiem pieaug kļūdu amplitūdas, savukārt šie paši augstāko grādu koeficienti ietver salīdzinoši daudz gravitācijas signālu informācijas.



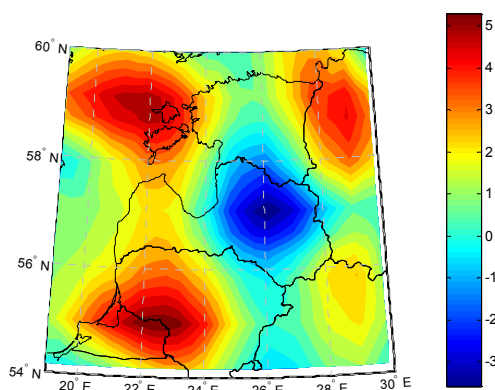
1.25.att. Pēkšņā apraušana (pa kreisi) un plūstošā apraušana (pa labi)

Pastāv divi apraušanas funkciju veidi: pēkšņā apraušana un plūstošā apraušana. Pēkšņajā apraušanā tiek izvēlētas vērtības mazākas par  $n \leq n_{max}$ , un tām tiek piešķirts svara faktors  $W = 1$ . Savukārt vērtībām  $n \geq n_{max}$ , tiek piešķirts svara faktors  $W = 0$ . Šis apraušanas veids tika izmantots 1.2. nodaļas piemēros. Plūstošajā apraušanā svara faktors  $W$  plūstoši samazinās no 1 līdz 0 līdz ar  $n$ , noteiktu grādu robežās [102].

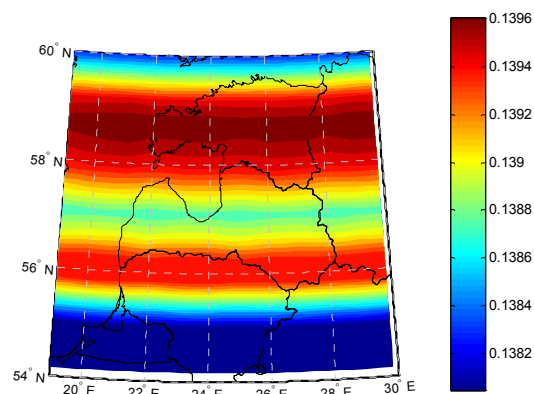
Kā tālāko apskatīsim piemēru vertikāles novirzes ziemeļu-dienvidu komponentei Baltijas valstu teritorijā no Aiub-Grace01s globālā gravitācijas lauka modeļa ar četrām dažādām apraušanas robežām (120, 90, 60 un 30). Piemērā izmantota pēkšņās apraušanas funkcija. 1.26. – 1.33. attēlos redzam, ka, pazeminot apraušanas robežu, ievērojami samazinās arī standartnovirzes. Apraušanas robežai  $n = 120$ , standartnovirzes svārstās starp 0.1382 un 0.1396 loka sekundēm,  $n = 90$  – starp 0.0141 un 0.0145 loka sekundēm,  $n = 60$  – starp 0.00124 un 0.00143 loka sekundēm un  $n = 30$  – starp 0.000095 un 0.000101 loka sekundēm. Savukārt 1.26., 1.28., 1.30., un 1.32. attēlos redzam, ka pazeminot apraušanas robežu, samazinās no globālā modeļa iegūtās vertikāles novirzes komponentes izšķirtspēja.

Ģeoīda modelēšanā bieži nākas lietot apraušanas funkcijas [100]. Ir svarīgi izvēlēties, pie kura grāda robežas veikt apraušanu, piemēram, nelielam reģionam nepieciešama detalizēta informācija, tātad apraušana tiks veikta pie augstākas grāda robežas, nekā, piemēram, pasaules kartei. Tāpat nepieciešams izvērtēt, kāda ir pieļaujamā precizitāte. Jāņem vērā, kāda informācija ir iekļauta GGM, piemēram, EIGEN-GL04c modelim, kurā izmantota tikai GRACE satelīta

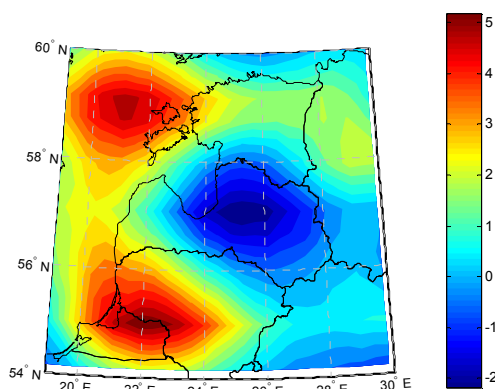
informācija, par atbilstošu tiek uzskatīta  $n = 95$  apraušanas robeža, kas ir robeža ticamai gravitācijas lauka informācijai [14].



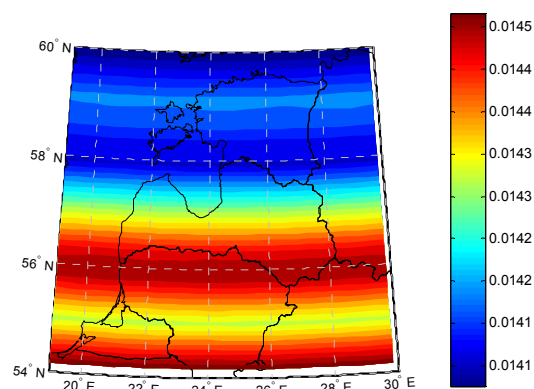
1.26.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponente ( $n=120$ ) [loka s]



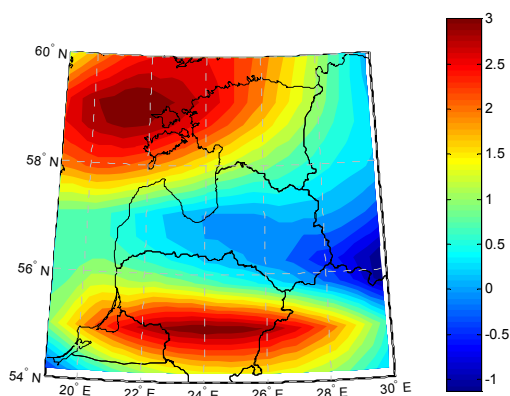
1.27.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponentes standartnovirzes ( $n=120$ ) [loka s]



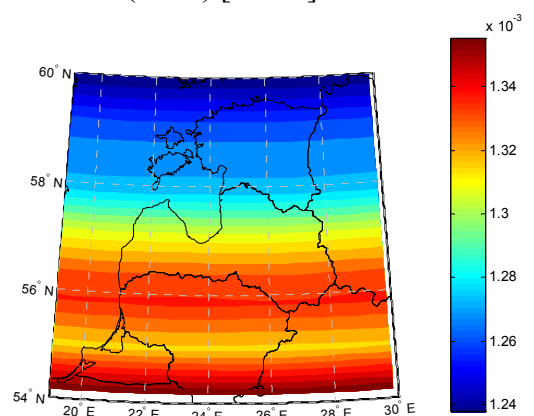
1.28.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponente ( $n=90$ ) [loka s]



1.29.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponentes standartnovirzes ( $n=90$ ) [loka s]

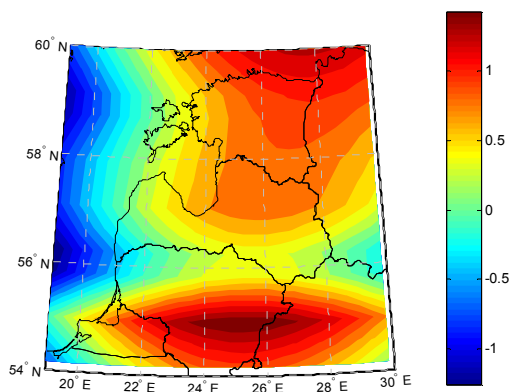


1.30.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponente ( $n=60$ ) [loka s]

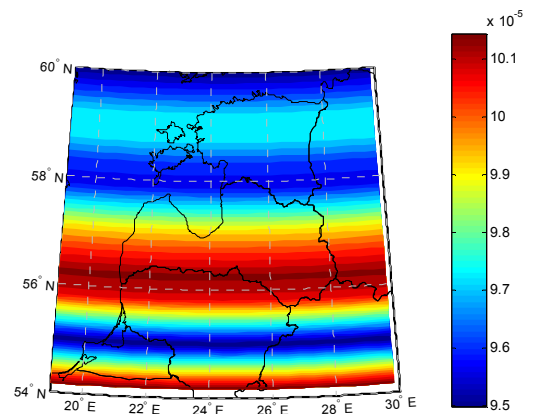


1.31.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponentes standartnovirzes ( $n=60$ ) [loka s]





1.32.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponente (n=30) [loka s]



1.33.att. Aiub-Grace01s GGM vertikāles novirzes ZD komponentes standartnovirzes (n=30) [loka s]

#### 1.4. Molodenska un Helmerta vertikāles novirzes

Vertikāles novirzes komponentes, kas iegūtas no globālā Zemes gravitācijas lauka modeļa sfēriskās harmonijas koeficientiem, ir Molodenska vertikāles novirzes sfēriskā aproksimācijā. Molodenska vertikāles noviržu definīcijā kā referencvirzienu izmanto izliekto svērtēnisko līniju elipsoīda normāles vietā [40].

Sfēriski aproksimētajām Molodenska vertikāles novirzēm ( $\xi_M, \eta_M$ ) jāveic divas korekcijas, lai iegūtu Helmerta (astroģeodēziskās) vertikāles novirzes elipsoidālā aproksimācijā; tās ir:

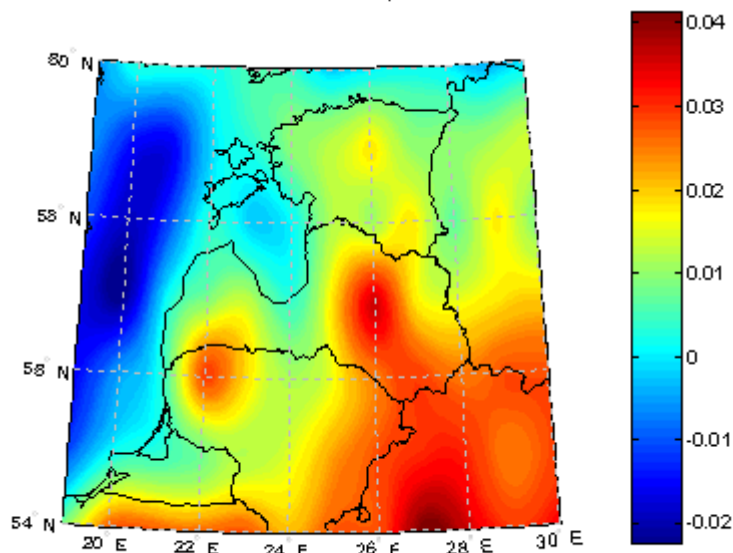
$$\begin{aligned}\xi &= \xi_M + \delta\xi^{NC} + \delta\xi^{ell} \\ \eta &= \eta_M.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Veikti pētījumi, kas parāda, ka korekciju lietošana ievērojami samazina atšķirības starp vertikāles novirzēm, iegūtām no GGM sfēriskās harmonijas koeficientiem un Helmerta vertikāles novirzēm [51].

Nosacījums  $\delta\xi^{NC}$  (normālās svērtēniskās līnijas izlieces korekcija) attiecas tikai uz ziemeļu-dienvidu komponenti  $\xi_M$ . To aprēķina kā funkciju no elipsoidālā augstuma  $h$  un ģeodēziskā platuma  $\varphi$ [40]:

$$\delta\xi^{NC} = 0.17'' \cdot h(\text{km}) \cdot \sin 2\varphi.\tag{1.11}$$

Šī korekcija Baltijas valstu reģionā sasniedz maksimālo vērtību augstieņu apgabalos (~0.03-0.04 loka sekundes), savukārt tā ir ļoti neliela zemiņēs un piejūras reģionos.

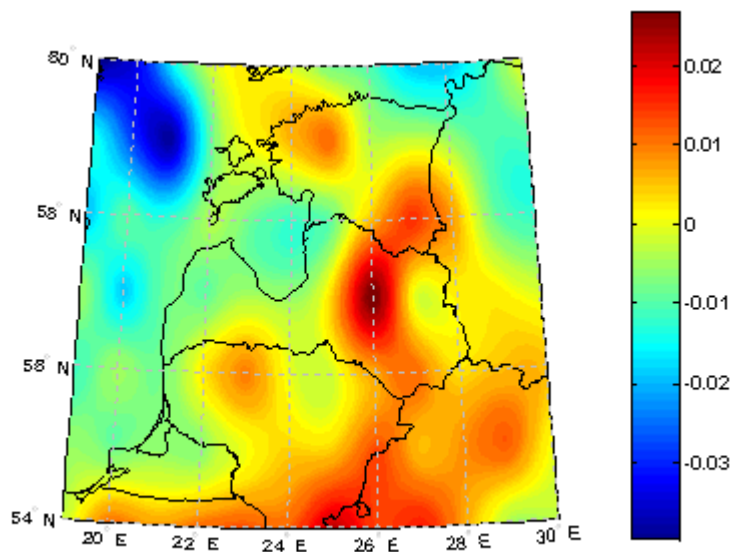


1.34.att. Normālās svērtēniskās līnijas korekcija Baltijas valstu reģionā [loka s]

Papildus korekcija ir nepieciešama, jo  $\xi_M$  komponente ir aprēķināta attiecībā pret ģeocentrisko platumu  $\bar{\varphi}$ , nevis ģeodēzisko platumu  $\varphi$ . Tas nozīmē, ka  $(\xi_M, \eta_M)$  ir aprēķinātas sfēriskajā aproksimācijā. Garuma grādu virzienā nav atšķirības starp sfērisko un elipsoidālo aproksimāciju, tādēļ austrumu-rietumu komponentei nav nepieciešama korekcija. Elipsoidālā korekcija ziemeļu-dienvidu komponentei  $\xi_M$  [40]:

$$\delta\xi^{ell} = (\varphi - \bar{\varphi}) \frac{\delta g}{\gamma}, \quad (1.12)$$

kur  $(\varphi - \bar{\varphi})$  ir starpība starp ģeodēzisko un ģeocentrisko platumu,  $\delta g$  ir gravitācijas anomālija (koordinātēs  $\varphi, \lambda, h$ ) un  $\gamma$  ir normālā gravitācija uz elipsoīda (platumā  $\varphi$  un  $h = 0$ ). Gravitācijas anomālija tika aprēķināta, izmantojot ICGEM (*International Centre for Global Earth Models*) *Calculation Service* [116]. Normālā gravitācija tika aprēķināta pēc Somigliana formulas [72].



3.35.att. Elipsoidālā korekcija Baltijas valstu reģionā [loka s]

Elipsoidālā korekcija Baltijas valstu reģionā sasniedz vērtības no aptuveni -0.04 līdz +0.03 loka sekundēm. Maksimālās iespējamās vērtības platumu starpībai ( $\varphi - \bar{\varphi}$ ) ir 690'' un gravitācijas anomāliju  $\delta g$  maksimālās vērtības ir aptuveni 200 mgal, tāpēc elipsoidālā korekcija nekad nepārsniegs 0.15'' vērtību [40].

Pētījums, izmantojot vertikāles novirzes no EGM2008 GGM, parāda, ka nesakritība starp ar astroģeodēziskām metodēm iegūtām vertikāles novirzēm un no EGM2008 modeļa aprēķinātām vertikāles novirzēm kalnu reģionos vēl joprojām var būt līdz pat 3.5 loka sekundēm arī pēc korekciju lietošanas, tomēr šīs nesakritības var samazināt līdz par 0.8 loka sekundēm, izmantojot RTM (*residual terrain model*) datu modeļus [34].

## 2. KTH ĢEOĪDA APRĒĶINU METODE

KTH pieejas ģeoīda aprēķinu metode tika attīstīta Karaliskajā Tehnoloģiju institūtā (KTH) Stokholmā. Šī metode izmanto Stoksa integrāļa mazāko kvadrātu modifikāciju. Šīs modifikācijas princips ir saskaņot uz Zemes veikto mērījumu gravitācijas datus un globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu datus. Pastāv arī citas Stoksa formulas modificēšanas metodes [74].

Dažādi mazāko kvadrātu stohastiskie risinājumi tiek izmantoti, lai noteiktu tuvējās zonas virsmas integrācijas laukuma maksimālo sfērisko attālumu un maksimālo GGM koeficientu pakāpi. Modificēta formula kombinē novērotās gravitācijas anomālijas un GGM. Gravimetriskie ģeoīda augstumi tiek iegūti, piemērojot četras papildus korekcijas aptuvenajam ģeoīda augstumam. Šīs papildus korekcijas attiecas uz topogrāfijas un atmosfēras gravitācijas ietekmi, lejup vērsta turpinājuma (*DWC - downward continuation*) redukciju un Zemes formas elipsoidālo tuvinājumu.

Galvenā atšķirība starp KTH metodi un tradicionāli lietotajām pieejām gravimetriskā ģeoīda noteikšanā ir atšķirīgā attieksme pret gravitācijas korekciju un arī dažādo gravitācijas anomāliju datu tipu lietošanu Stoksa integrālī. Tradicionālajās pieejās novērotās gravitācijas anomālijas vispirms tiek labotas ar topogrāfijas un atmosfēras gravitācijas ietekmi un pēc tam reducētas uz ģeoīda virsmu. Stoksa integrālis ar koriģētām un reducētām gravitācijas anomālijām, pēc primāro netiešo topogrāfisko ietekmju noņemšanas no ģeoīda, nodrošina galējo gravimetrisko ģeoīdu.

KTH metodē Stoksa integrālis tiek lietots tieši novērotājiem gravitācijas anomāliju datiem uz Zemes virsmas. Stoksa integrālis nodrošina tikai aptuvenus ģeoīda augstumus. Kombinētas topogrāfijas un atmosfēras korekcijas pievieno aptuvenajam ģeoīda augstumam. Līdzīgi gravitācijas anomāliju DWC no Zemes virsmas uz ģeoīda virsmu tiek aplūkotas kā DWC korekcijas aptuvenajam ģeoīda augstumam. Stoksa formulas formulējums sfēriskajā aproksimācijā noved pie Zemes formas elipsoidālās korekcijas. KTH metode ir veiksmīgi izmantota ģeoīda aprēķiniem un esošo ģeoīda modeļu novērtēšanai vairākās valstīs [1].

### 2.1. Ģeoīda formas noteikšana, izmantojot Stoksa formulu

Ģeoīds būtībā ir gravitācijas lauka ekvipotenciāla virsma. Lokālu masu tuvumā, kas rada papildu potenciālu  $\Delta U$  pie normālā Zemes potenciāla, šai virsmai vajadzētu izvirzīties uz ārpusi, lai saglabātu konstantu kopējo potenciālu. Ģeoīda ondulācija:

$$N = \frac{\Delta U}{g}, \quad (2.1)$$

kur  $g$  ir lokālā punkta paātrinājuma vērtība. Virs ģeoīda esošās masas sarežģī šo uzdevumu, jo ir pieņemts, ka punkts atrodas jūras līmeņa augstumā. Pirmā problēma ir noteikt ondulāciju  $N$  nevis izmantojot  $\Delta U$ , kura mērījumus nav iespējams veikt, bet gan izmantojot  $g$  kā novirzes no normālā paātrinājuma. Starpība starp lokāli mērītu gravitācijas vērtību un teorētisko vērtību tajā pašā garumā uz elipsoīda ir  $\Delta g$ .  $\Delta g$  anomālija rodas divos gadījumos. Pirmais ir masas sablīvējums, kura efekts uz gravitāciju tiek noteikts kā negatīvs radiāls atvasinājums no  $\Delta U$ , tas ir,  $-\partial(\Delta U)/\partial r$ . Otrs gadījums ir augstuma  $N$  ietekme, jo gravitācija tiek mērīta uz ģeoīda, kamēr teorētiskā vērtība attiecas uz elipsoīdu. Zemāk parādīts, ka  $g$  vertikālais gradients jūras līmeņa augstumā ir  $-2g/R$ , kur  $R$  ir Zemes vidējais rādiuss, augstuma ietekme tiek noteikta kā:

$$\left(\frac{-2g}{R}\right)N = -\frac{2\Delta U}{R}. \quad (2.2)$$

Kombinējot abas ietekmes:

$$\Delta g = -\frac{\partial}{\partial r}(\Delta U) - \frac{2\Delta U}{R}. \quad (2.3)$$

Šī formula veido sakarību starp  $\Delta U$  un izmērāmu lielumu  $\Delta g$ , un, ja  $\Delta U$  ir noteikts, formula (2.1) noved pie  $N$ . Tomēr, tā kā gan  $\Delta g$ , gan  $\Delta U$ , ietver masas anomāliju ietekmi ne tikai no punkta zem mērījumu vietas, bet arī no tuvējā reģiona, (2.1) formulu nav iespējams atrisināt kādā punktā uz Zemes bez citu punktu ietekmes. Šo problēmu 1849.gadā atrisināja britu fiziķis un matemātiķis Džordžs Gabriels Stokss. Stokss ieguva  $N$  integrālvienādojumu, kura integrālis ietver  $\Delta g$  vērtības, saistītas ar leņķiskā attāluma no stacijas funkciju, integrēšana notiek pa Zemes virsmu. Pamatojoties uz gravitācijas datiem, tā ļauj noteikt ģeoīda augstumu  $N$ . Līdz pat pirmo satelītu palaišanai 1957.gadā, Stoksa formula bija galvenā ģeoīda formas noteikšanas metode, tomēr tās lietošana radīja lielas grūtības. Leņķiskā attāluma funkcija konverģē ļoti lēnām, un mēģinājums aprēķināt  $N$  jebkurā punktā rada nenoteiktības no tiem reģioniem, kuros mērījumi nav veikti.

Stoksa formula:

$$N = \frac{R}{2\pi\lambda} \iint_{\sigma} (g - \gamma_0) S(\psi) d\sigma, \quad (2.4)$$

kur  $\gamma_0$  – normālā gravitācija;  $(g - \gamma_0)$  – gravitācijas anomālija;  $d\sigma$  – virsmas  $\sigma$  diferenciālis;  $\psi$  – sfēriskais attālums. Ortogonalitātes īpašības starp Legendre polinomiem  $P_n(\cos \psi)$  uz sfēras ļauj atainot Stoksa funkciju  $S(\psi)$  kā

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi). \quad (2.5)$$

Stoksa formula nodrošina  $N$ , integrējot uz ģeoīdu attiecināmās gravitācijas anomālijas. Pie punkta, kur  $\psi = 0$ , funkcija kļūst bezgalīga, tāpēc ir nepieciešams pievērst uzmanību mērījumiem punkta apkārtnē [98].

## 2.2. Stoksa formulas modificēšana

Integrēšana Stoksa formulā bieži tiek veikta nevis pa visu Zemes virsmu, bet tikai pa ierobežotu sfērisku laukumu apkārt aprēķina punktam. Šeit parādās sfēriskās harmonijas koeficientu apraušanas kļūda, ko var novērst, modificējot Stoksa formulu, lai tā ietvertu Zemes gravitācijas anomālijas un garo viļņu informāciju no GGM.

Līdz ar satelītiem parādījās arī pirmie GGM un iespēja ģenerēt globālus ģeoīda modeļus. Kombinējot informāciju no GGM ar vietējo gravitācijas datu Stoksa integrāli, var noteikt vietējo ģeoīda modeli. GGM dod garo viļņu informāciju par ģeoīdu un ģeopotenciālu, bet vietējie gravitācijas dati dod īso viļņu informāciju. Tā kā tiek lietoti arī vietējie, nevis tikai globālie dati, Stoksa kodols tiek aprauts pie datu pārklājuma ārējā diapazona. Tas noved pie apraušanas kļūdām sakarā ar gravitācijas informācijas zaudēšanu no neiekļautajām ārējām zonām. Šīs kļūdas var vai nu ignorēt vai arī samazināt, modificējot Stoksa kodolu.

Stoksa formulas modificēšanu var iedalīt divās kategorijās: deterministiskais un stohastiskais modifikācijas tips. Deterministiskā pieeja paredz samazināt apraušanas kļūdu, kas radusies neiekļauto zonu dēļ. To izdara, noņemot Stoksa kodola zemāku pakāpju nosacījumus (garo viļņu daļu) un filtrējot gravitācijas anomālijas [105]. Stohastiskā pieeja lieto papildu informāciju potenciāla koeficientiem un gravitācijas anomāliju kļūdām

kombinācijā ar Stoksa kodola mazāko kvadrātu modifikāciju, lai samazinātu globālo vidējo kvadrātisko kļūdu [90] [91].

Pieņemot, ka ap aprēķinu punktu eksistē laukums  $\sigma_0$  ar sfērisko integrēšanas rādiusu  $\psi_0$ , Sjobergs [86] ieteica vienkāršu un vispārēju Stoksa formulas modificēšanas modeli, nosakot divas patvaļīgu modifikācijas parametru kopas ( $s_n$  un  $b_n$ ), no tā seko:

$$\tilde{N} = \frac{c}{2\pi} \iint_{\sigma_0} S_L(\psi) \Delta g d\sigma + c \sum_{n=2}^M b_n \Delta g_n^{GGM}, \quad (2.6)$$

kur  $b_n = Q_n^L + s_n$ ,  $c = R/(2\gamma)$  un  $\Delta \tilde{g}_n^{EGM}$  ir Laplasa harmonija pakāpei  $n$ , un to var aprēķināt pēc GGM [31]

$$\Delta \tilde{g}_n^{GGM} = \frac{GM}{a^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (n-1) \sum_{m=-n}^n C_{nm} Y_{nm}, \quad (2.7)$$

kur  $a$  ir elipsoīda ekvatoriālais rādiuss,  $r$  ir aprēķinu punkta ģeocentriskais rādiuss,  $GM$  ir pieņemtā gravitācijas konstante, koeficienti  $C_{nm}$  ir traucējošā potenciāla pilnībā normētie sfēriskās harmonijas koeficienti no GGM, un  $Y_{nm}$  ir pilnībā normēta sfēriskā harmonija [31].

Modificētā Stoksa funkcija tiek izteikta kā

$$S_L(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{2} s_n P_n(\cos\psi). \quad (2.8)$$

Augšējā robeža  $L$  ir patvaļīga un parasti nav vienāda ar  $M$ . Apraušanas koeficientus  $Q_n^L$  var aprēķināt šādi:

$$Q_n^L = Q_n - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{2} s_k e_{nk}, \quad (2.9)$$

kur Molodenska apraušanas koeficientus  $Q_n$  var izteikt

$$Q_n = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi, \quad (2.10)$$

un  $e_{nk}$  ir tā sauktie Paula koeficienti [77], kas ir funkcijas no  $\psi_0$ . Izmantojot datu kļūdu novērtējumu (gravitācijas anomālijām  $\Delta g$  un sfēriskajai harmonijai  $\Delta g_n^{GGM}$ ), un dažas aproksimācijas, nonāk pie ģeoīda augstuma novērtējuma, ko sauc par aptuveno ģeoīda augstumu.

Tā kā iespējamās GGM un gravitācijas anomāliju kļūdas, ir iespējams pārrakstīt vienādojumu (2.6) sekojošajā spektrālajā formā [86]

$$\tilde{N} = c \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{2}{n-1} - Q_n^L - s_n^* \right) (\Delta g_n + \varepsilon_n^T) + c \sum_{n=2}^M (Q_n^L + s_n^*) (\Delta g_n + \varepsilon_n^S), \quad (2.11)$$

kur  $\varepsilon_n^T$  un  $\varepsilon_n^S$  ir spektrālās kļūdas attiecīgi Zemes un GGM gravitācijas anomālijām. Modifikācijas parametri ir

$$s_n^* = \begin{cases} s_n & ja \ 2 \leq n \leq L \\ 0 & pārējos gadījumos. \end{cases} \quad (2.12)$$

Modifikācijas procedūras galvenais mērķis ir samazināt kļūdu ietekmi uz ģeoīda noteikšanu. Tās atļauj samazināt apraušanas kļūdas, kļūdainu gravitācijas datu ietekmi, ģeopotenciāla koeficientu ietekmi un nodrošina dažādu datu avotu izmantošanu optimālā veidā [15].

Ja izmanto GRACE modeļus ar ļoti augstu precizitāti zemajās un vidējās pakāpēs, kļūst svarīgi izmantot kodola modifikācijas, kas efektīvi no gravitācijas anomālijām izfiltrētu garo viļņu kļūdas. Šim mērķim gravitācijas datiem ir nepieciešama atbilstoša svēršanas shēma kā *a priori* vai empīrisks stohastisks modelis. Protams, īstās gravitācijas datu kļūdas nav zināmas. Tomēr mazāko kvadrātu metode ir diezgan nejūtīga pret kļūdainu svaru izvēli, kā tas jau zināms no citām ģeodēzijas apakšnozarēm.

Pamatojoties uz ģeoīda ondulāciju  $N$  spektrālo formu [31]



$$N = c \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{2\Delta g_n}{n-1} \right), \quad (2.13)$$

sagaidāmā globālā vidējā kvadrātiskā kļūda ģeoīdam [60]:

$$\begin{aligned} m_{\tilde{N}}^2 &= E \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} (\tilde{N} - N)^2 d\sigma \right\} \\ &= c^2 \sum_{n=2}^M (b_n^2 d c_n) \\ &+ c^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (b_n^* - Q_n^L - s_n^*)^2 c_n + \left( \frac{2}{n-1} - Q_n^L - s_n^* \right)^2 \sigma_n^2 \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

kur  $E$  ir statistiskais izredžu operators,  $c_n$  ir gravitācijas anomāliju pakāpes variācijas,  $\sigma_n^2$  ir Zemes gravitācijas anomāliju kļūdu pakāpes variācijas,  $d_{c_n}$  ir GGM gravitācijas anomāliju kļūdu pakāpes variācijas un

$$b_n^* = \begin{cases} b_n & \text{ja } 2 \leq n \leq L \\ 0 & \text{pārējos gadījumos} \end{cases}, \quad s_n^* = \begin{cases} s_n & \text{ja } 2 \leq n \leq L \\ 0 & \text{pārējos gadījumos} \end{cases}. \quad (2.15)$$

Pirmais, vidējais un pēdējais nosacījums vienādojuma (2.14) labajā pusē attiecīgi ataino GGM kļūdu, apraušanas kļūdu un kļūdainu Zemes gravitācijas datu ietekmi. Visiem datiem pieņem, ka kļūdas ir gadījuma rakstura un ar sagaidāmo lielumu 0, tādēļ galējās kļūdas vērtība var tikt iegūta, apvienojot atsevišķus kļūdu avotus. Tomēr praksē starp GGM un Zemes gravitācijas dati bieži ir ievērojama korelācija. Piemēram, lietojot virsmas gravitācijas anomālijas EGM96 modelī, var pieņemt korelācijas starp šiem abiem datu veidiem. Tomēr, ja kāds izmanto tikai satelītu sfēriskās harmonijas koeficientus, no šīs korelācijas iespējams izvairīties. No otras puses, ir zināms, ka Zemes datu informācija ir ietverta GGM augstākajās pakāpēs, bet lielākā daļa ģeoīda masas atrodas zemākajās pakāpēs, tāpēc var pieņemt, ka korelācijas ietekme ir nenozīmīga.

### 2.3. Signālu un trokšņu pakāpes variācijas

Gravitācijas anomāliju signālu un trokšņu pakāpes variācijas, Zemes gravitācijas anomāliju kļūdu pakāpes variācijas un GGM gravitācijas anomāliju kļūdu pakāpes variācijas var attiecīgi aprēķināt šādi [60]:

$$c_n = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_n^2 d\sigma, \quad \sigma_n^2 = E \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} (\varepsilon_n^T)^2 d\sigma \right\} \quad (2.16)$$

un

$$dc_n = E \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} (\varepsilon_n^S)^2 d\sigma \right\}. \quad (2.17)$$

Zemākās signāla pakāpes variāciju  $c_n$  nosaka, izmantojot GGM modeļu traucējošā potenciāla sfēriskās harmonijas koeficientus  $C_{nm}$  un  $S_{nm}$ :

$$c_n = \frac{(GM)^2}{a^4} (n-1)^2 \sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2). \quad (2.18)$$

Praksē bezgalīgā summa vienādojumā (2.18) apraušana jāveic pie kādas augšējas robežas, piemēram  $n_{max}=10800$ . Augstākas signālu pakāpes variācijas var ģenerēt sintētiski. Tscherning un Rapp [101] modelis signāla gravitācijas anomāliju pakāpes variāciju noteikšanai dod pieņemamas ģeoīda augstuma RMS vērtības [3], lai uzskatītu gravitācijas anomāliju augstākās pakāpes variāciju:

$$c_n = A \frac{(n-1)}{(n-2)(n+B)} \left( \frac{R_B}{R} \right)^{n+2}. \quad (2.19)$$

Tomēr šis modelis ir derīgs tikai gravitācijas laukam ar neizlabotu topogrāfijas ietekmi. Kļūdainu potenciāla koeficientu kļūdu jeb trokšņu anomāliju pakāpes variācijas ar standartkļūdām  $d_{C_{nm}}$  un  $d_{S_{nm}}$  ( $c_n$ ) noteiktas no GGM:

$$dc_n = \frac{(GM)^2}{a^4} (n-1)^2 \sum_{m=0}^n (d_{c_{nm}}^2 + d_{s_{nm}}^2). \quad (2.20)$$

Lai noteiktu kļūdu pakāpes variācijas Zemes gravitācijas anomālijām, tiek lietoti divi dažādi kļūdu pakāpes variāciju modeļi, lai atainotu gravitācijas anomāliju kļūdas, proti, nekorelētais un savstarpējā attāluma modelis. Pēdējam tiek atainota izotropiska kļūdu pakāpes kovariances funkcija  $C(\Psi)$  [89]:

$$C(\Psi) = c_1 \left[ \frac{1-\mu}{\sqrt{1-2\mu\cos\psi + \mu^2}} - (1-\mu) - (1-\mu)\mu\cos\psi \right], \quad (2.21)$$

un pakāpes variācijas  $\sigma_n^2$  savstarpējā attāluma tipa funkcijai

$$\sigma_n^2 = c_1(1-\mu)\mu^n, 0 < \mu < 1, \quad (2.22)$$

kur  $c_1$  un  $\mu$  ir konstantes. No slēgtās formas (2.16) vienādībā, parametrus  $c_1$  un  $\mu$  var aprēķināt no zināšanām par variāciju  $C(0)$  un korelācijas garumu  $\Psi_{1/2}$ . Tad tiek aprēķināts  $c_1$  kā  $c_1 = \sigma^2/\mu^2$ , kas izriet no (2.18).

Otrajā kļūdu modelī pieņem, ka novērojumu troksnis nekorelējas un tiek aptuveni modelēts ar frekvenču joslā ierobežotu balto troksni ar nemainīgām pakāpes-kārtas variācijām [52]

$$\sigma_{nm,\Delta g} = \frac{\sigma_{n,\Delta g}^2}{(2n+1)}. \quad (2.23)$$

Skaitliskie rezultāti parāda, ka otrais modelis dod minimālo sagaidāmo vidējo kvadrātisko kļūdu pret GNSS/nivelēšanas datiem [60].

#### 2.4. Papildus korekcijas KTH pieejā

Nosakot ģeoīdu pēc Stoksa formulas, ir svarīgi, lai ārpus ģeoīda nebūtu kādas masas, kā arī gravitācijas dati jāreducē uz jūras līmeni. Tomēr, tā kā virs ģeoīda virsmas pastāv topogrāfiskas un atmosfēras masas, ir nepieciešams pievienot dažas korekcijas.

KTH ģeoīda noteikšanas aprēķinu shēmā tiek izmantotas virsmas gravitācijas anomālijas un GGM, lai noteiktu aptuvenu ģeoīda augstumu  $\tilde{N}^0$ . Pēc tam visas nepieciešamās korekcijas tiek tieši pievienotas  $\tilde{N}^0$ . Tā kā gravitācijas anomālijas Stoksa formulā jāattiecinā uz ģeoīdu, ir nepieciešama novērotās gravitācijas redukcija no Zemes virsmas uz ģeoīdu. Šo soli sauc par lejup vērsto turpinājumu jeb DWC. KTH pieejā visas šīs atsevišķās ietekmes tiek aizvietotas ar kopējo topogrāfisko ietekmi. Ģeoīda augstuma  $N$  aprēķina procedūra var tikt apkopota sekojošā formulā [60]:

$$N = \tilde{N}^0 + \delta N_{comb}^{Topo} + \delta N_{DWC} + \delta N_{comb}^a + \delta N_e, \quad (2.24)$$

kur  $\delta N_{comb}^{Topo}$  ir kombinētā topogrāfiskā korekcija, kas ietver tiešās un netiešās topogrāfiskās ietekmes uz ģeoīda augstumu,  $\delta N_{DWC}$  ir DWC ietekme,  $\delta N_{comb}^a$  ir kombinētā atmosfēras korekcija, kas ietver tiešās un netiešās atmosfēras ietekmes, un  $\delta N_e$  ir elipsoidālā korekcija Stoksa formulas sfēriskai aproksimācijai uz elipsoīda virsmu.

Topogrāfiskā korekcija [60]:

$$\delta N_{comb}^{Topo} = \delta N_{dir} + \delta N_{indir} \approx -\frac{2\pi G\rho}{\gamma} H^2, \quad (2.25)$$

kur  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$  ir vidējais topogrāfiskās masas blīvums un  $H$  ir ortometriskais augstums.

DWC ietekmi aprēķina tieši ģeoīdam, nevis gravitācijas anomālijām, kā tas ir tradicionālajā Stoksa formulas pieejā [87]. Šajā gadījumā:

$$\delta N_{DWC} = \frac{c}{2\pi} \iint_{\sigma_0} S_L(\psi)(\Delta g^* - \Delta g) d\sigma, \quad (2.26)$$

kur  $\Delta g$  ir gravitācijas anomālija virsmas aprēķinu punktā P un  $\Delta g^*$  ir attiecīgs DWC lielums uz ģeoīda.

Gala formula ir [60]:

$$\delta N_{DWC}(P) = \delta N_{DWC}^{(1)}(P) + \delta N_{DWC}^{L1, Far} + \delta N_{DWC}^{L2}, \quad (2.27)$$

kur

$$\delta N_{DWC}^{(1)} = H_P \left( \frac{\Delta g(P)}{\gamma} + 3 \frac{N_P^0}{r_P} - \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \Delta g}{\partial r} \Big|_P H_P \right) \quad (2.28)$$

un

$$\delta N_{DWC}^{L1, Far} = c \sum_{n=2}^M (S_n^* + Q_n^L) \left[ \left( \frac{R}{r_P} \right)^{n+2} - 1 \right] \Delta g_n(P) \quad (2.29)$$

un

$$\delta N_{DWC}^{L2} = \frac{c}{2\pi} \iint_{\sigma_0} S_L(\psi) \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial r} \Big|_P \right) (H_P - H_Q) d\sigma_Q, \quad (2.30)$$

kur  $r_P = R + H_P$ ,  $\sigma_0$  ir sfēriskais laukums ar rādiusu  $\psi$  ap punktu P,  $H$  ir punkta P ortometriskais augstums, un  $\frac{\partial \Delta g}{\partial r}$  ir gravitācijas gradients, kuru var aprēķināt

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} \Big|_P = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma_0} \frac{\Delta g_Q - \Delta g_P}{l_0^3} d\sigma_Q - \frac{2}{R} \Delta g(P), \quad (2.31)$$

kur

$$l_0 = 2R \sin \frac{\psi_{PQ}}{2}.$$

Elipsoidālā korekcija nepieciešama, jo Stoksa formula nosaka ģeoīda augstumu uz sfēras ar 0.3% sfērisko aproksimāciju. Tomēr robežvirsmas gravitācijas anomālijām ir ģeoīds, kuru var labāk aproksimēt pēc elipsoīda. Sfēriskā aproksimācija ģeoīda modeļa noteikšanā var radīt 0.3% kļūdu. Mūsdienās vairums vietējo ģeoīdu tiek noteikti, izmantojot modificēto Stoksa formulu, kas nozīmē, ka lielākā daļa garo viļņu ģeoīda iezīmes nosaka no GGM. Tā kā GGM var pareizi piemērot jūras līmenim (aptuvenus elipsoīds), atlikusī elipsoidālā korekcija Stoksa formulā ir ierobežota līdz integrēšanas robežai. Elipsoidālā korekcija modificētajai

Stoksa formulai ( $\delta N_e$ ) sfēriskās harmonijas kārtai  $e^2$ , kur  $e$  ir elipsoīda pirmā ekscentritāte, ir [88]:

$$\delta N_e(P) = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{2}{n-1} - s_n^* - Q_n^L \right) \left( \frac{a-R}{R} \Delta \tilde{g}_n^{EGM}(P) + \frac{a}{R} (\delta g_e)_n \right), \quad (2.32)$$

kur  $s_n^* = s_n$ , ja  $2 \leq n \leq M$  un  $s_n^* = 0$  pārējos gadījumos. Turklāt

$$\begin{aligned} (\delta g_e)_n = \frac{e^2}{2a} \sum_{m=-n}^n \{ [3 - (n+2)F_{nm}] T_{nm} - (n+1)G_{nm} T_{n-2,m} \\ - (n+7)E_{nm} T_{n+2,m} \} Y_{nm}(P), \end{aligned} \quad (2.33)$$

kur  $T_{nm}$  ir sfēriskās harmonijas koeficienti, elipsoidālie koeficienti  $E_{nm}$ ,  $F_{nm}$  un  $G_{nm}$  [88].

Atmosfēras masu klātbūtne ārpus ģeoīda virsmas nozīmē, ka ir nepieciešams pievienot papildu atmosfēras korekciju, lai apmierinātu robežnoteikumus Stoksa formulā. Atbilstoša atmosfēras korekciju modelēšana nepieciešama lietojot precīzas gravimetriskas metodes [97]. KTH shēmā, kombinētā atmosfēras ietekme  $\delta N_{comb}^a$  var tikt aproksimēta līdz kārtai  $H$  [92]

$$\begin{aligned} \delta N_{comb}^a(P) = -\frac{2\pi R \rho_0}{\gamma} \sum_{n=2}^M \left( \frac{2}{n-1} - s_n - Q_n^L \right) H_n(P) \\ - \frac{2\pi R \rho_0}{\gamma} \sum_{n=M+1}^{\infty} \left( \frac{2}{n-1} - \frac{n+2}{2n+1} Q_n^L \right) H_n(P), \end{aligned} \quad (2.34)$$

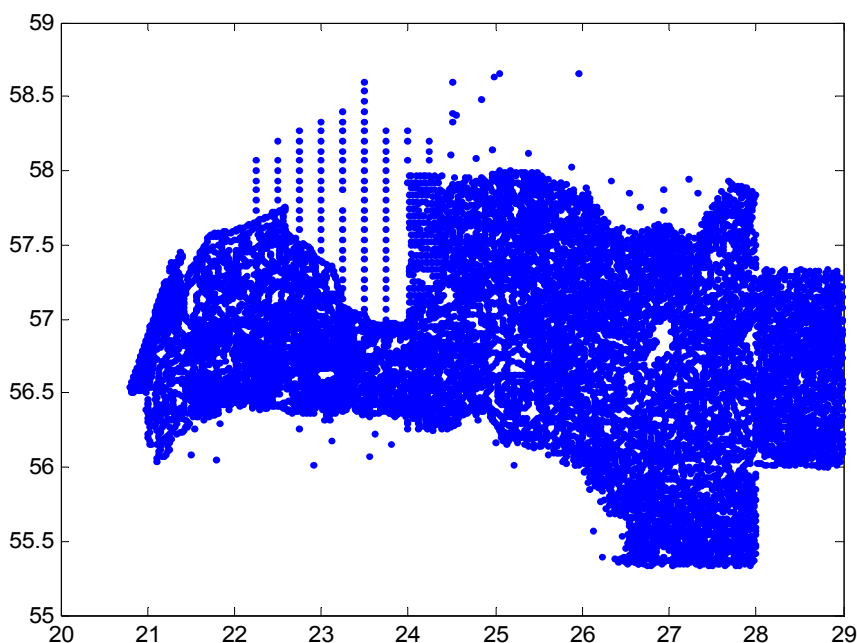
kur  $\rho_0$  ir atmosfēras blīvums jūras līmenī,  $H_n$  ir Laplasa harmonija topogrāfiskajam augstumam pakāpei  $n$  [60].

## 2.5. Ģeoīda modeļa aprēķins Latvijas teritorijai, izmantojot *KTH-Geolab* programmatūru

Kā izejas dati aptuvenā ģeoīda augstuma aprēķinam pēc formulas (2.6) tika izmantoti:

1) ICGEM (*International Centre for Global Gravity Field Models*) Zemes gravitācijas lauka modelis EGM2008, līdz 360., 180. vai 120. pakāpei [116];

2) Brīvā gaisa gravitācijas anomālijas no Ziemeļvalstu ģeodēziskās komisijas [118] gravimetriskās datu bāzes.



2.1.att. Ziemeļvalstu ģeodēziskās komisijas gravimetriskās datu bāzes brīvā gaisa gravitācijas anomāliju datu pārklājums

Kā izejas dati korekciju  $\delta N_{comb}^{Topo}$ ,  $\delta N_{DWC}$ ,  $\delta N_{comb}^a$  un  $\delta N_e$  aprēķinam tika izmantoti:

- 1) SRTM digitālais augstumu modelis [120];
- 2) brīvā gaisa gravitācijas anomālijas no Ziemeļvalstu ģeodēziskās komisijas gravimetriskās datu bāzes [118];
- 3) aptuvenas augstumu anomālijas no ICGEM *calculation service* [116].

Gravitācijas anomālijas kā robežvērtības uz ģeoīda nepieciešamas ģeoīda gravimetriskai noteikšanai. Gravitācijas reducēšanas mērķis ir reducēt novērotās gravitācijas vērtības uz ģeoīda virsmu un ārpus ģeoīda esošās topogrāfiskās masas pārvietot tādā veidā, ka ģeoīds kļūst par robežvirsmu. Šim nolūkam jāveic tādi noteikti pieņēmumi kā noteikts masas izvietojums un blīvums, tāpēc gravimetriskais ģeoīds ietver šīs masu blīvuma hipotēzes kļūdas.

Lai reducētu virsmas gravitācijas anomālijas  $\Delta g$  uz ģeoīda vērtībām punktā  $P_0$ , izmanto gravitācijas gradienta vertikālo komponenti  $\partial g / \partial H$  brīvajā gaisā un ortometrisko

augstumu  $H$ . Salīdzinājums ar normālo gravitāciju  $\gamma_0$  uz elipsoīda punktā  $Q_0$  dod iespēju noteikt brīvā gaisa anomāliju:

$$\Delta g_F = \Delta g + \delta g_F - \gamma_0. \quad (2.35)$$

Brīvā gaisa gravitācijas anomālijas ir gravitācijas anomālijas pēc brīvā gaisa redukcijas, kuras nepieciešamas, lai mērījumu labotu par paaugstinājumu, kurā mērījums veikts. Brīvā gaisa redukcija dod iespēju pārveidot mērījumus tā, ka var pieņemt, ka tie veikti uz jūras līmeņa virsmas. Brīvā gaisa redukcijā  $\delta g_F$  tiek iekļauts normālais vertikālais gradients  $\partial\gamma/\partial h$ , kur vērtība  $3086 \text{ ns}^{-2}$  pie  $\varphi = 45^\circ$  ir pietiekama:

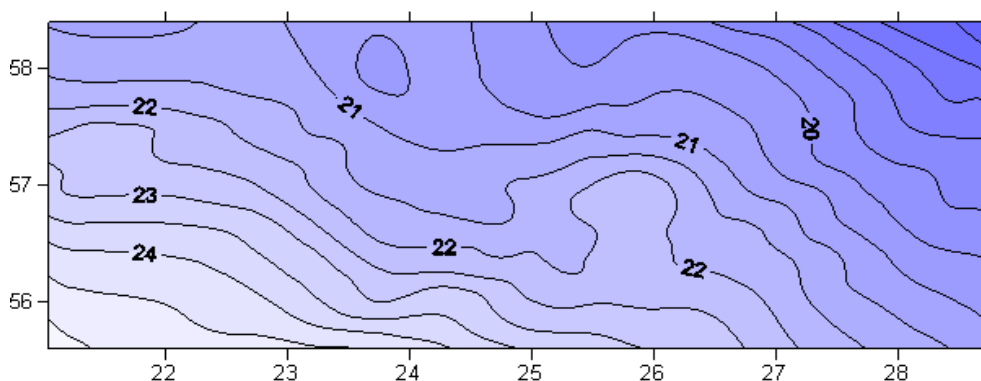
$$\delta g_F = -\frac{\partial g}{\partial H} H \approx -\frac{\partial \gamma}{\partial h} H \approx 3.086 H_{(m)} \mu\text{ms}^{-2}. \quad (2.36)$$

Normālo gravitāciju  $\gamma_0$  iespējams aprēķināt ar Somigliana formulu:

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (2.37)$$

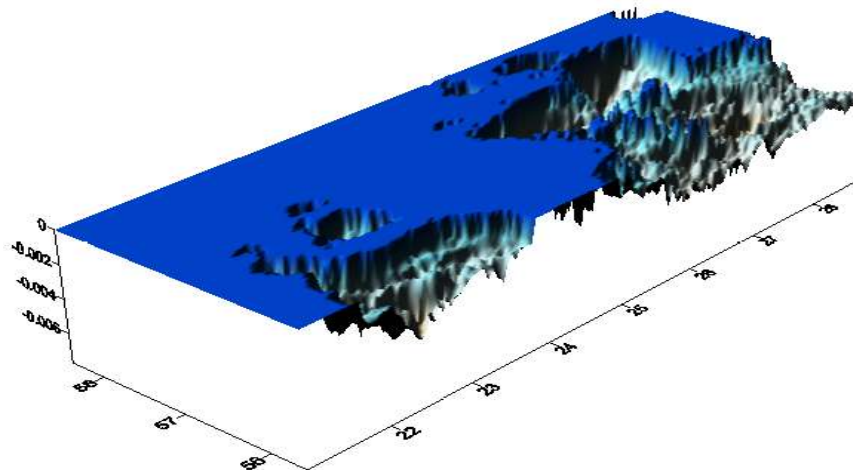
kur  $\gamma_a$  ir normālā gravitācija uz ekvatora,  $\gamma_b$  ir normālā gravitācija uz poliem.

Tomēr šīs brīvā gaisa anomālijas ietver topogrāfisko masu ietekmi. Tāpēc brīvā gaisa anomālijas korelējas ar punkta augstumu un neataino lielāka apgabala situāciju [98].



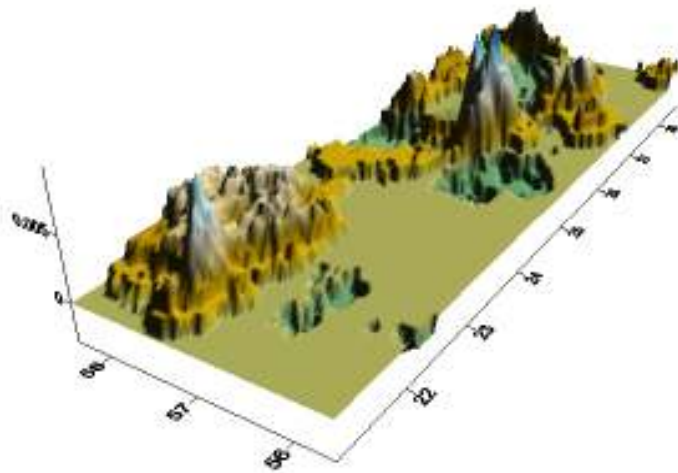
2.2.att. Iegūtais aptuvenais ģeoīda augstums ar EGM2008 koeficientiem līdz 360.pakāpei un integrācijas rādiusu 0.1 grāds [m]





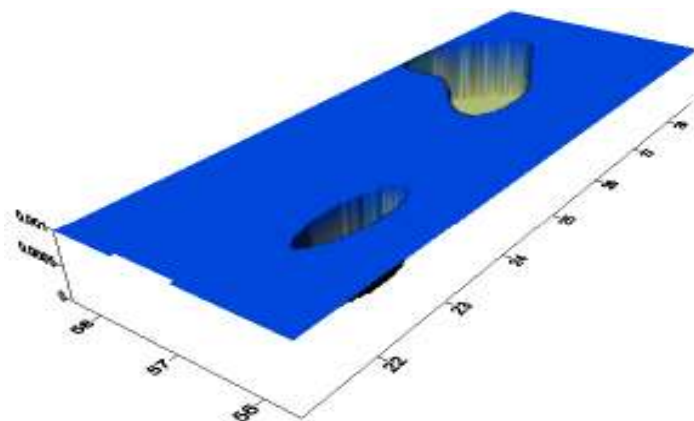
2.3.att. Topogrāfiskā korekcija Latvijas teritorijai ar EGM2008 koeficientiem līdz 360.pakāpei un integrācijas rādiusu 0.1 grāds [m]

Topogrāfiskās korekcijas minimālā vērtība ir -8 mm, maksimālā vērtība ir 0 mm, vidējā vērtība ir -1 mm un standartnovirze ir 1 mm.



2.4.att. DWC korekcija Latvijas teritorijai ar EGM2008 koeficientiem līdz 360.pakāpei un integrācijas rādiusu 0.1 grāds [m]

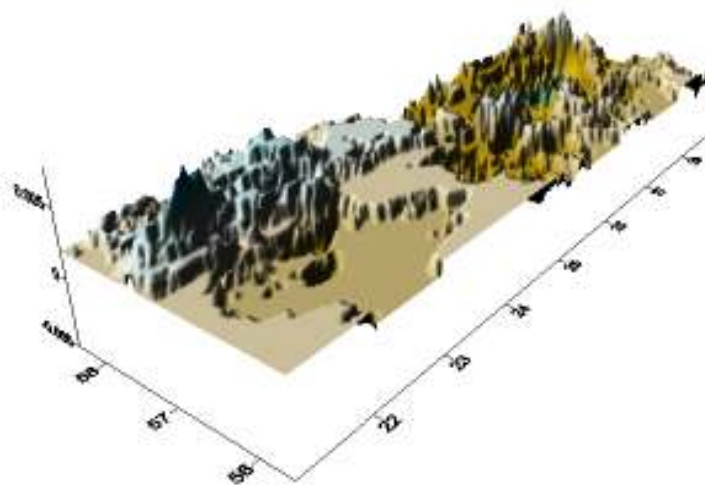
DWC korekcijas minimālā vērtība ir -3 mm, maksimālā vērtība ir 10 mm, vidējā vērtība ir -0.5 mm un standartnovirze ir 1.5 mm.



2.4.att. Elipsoidālā korekcija Latvijas teritorijai ar EGM2008 koeficientiem līdz 360.pakāpei un integrācijas rādiusu 0.1 grāds [m]

Elipsoidālās korekcijas minimālā vērtība ir 0 mm, maksimālā vērtība ir 1 mm, vidējā vērtība ir -0.9 mm un standartnovirze ir 0.3 mm.

Atmosfēras korekcija visai Latvijas teritorijai ir konstanta: 1 mm.



2.5.att. Korekciju summa Latvijas teritorijai ar EGM2008 koeficientiem līdz 360.pakāpei un integrācijas rādiusu 0.1 grāds [m]

Kopējo korekciju summas minimālā vērtība ir -5 mm, maksimālā vērtība ir 8 mm, vidējā vērtība ir -1.1 mm un standartnovirze ir 1.6 mm. Tātad Latvijas teritorijai korekcijas kopumā dod minimālu ieguldījumu ģeoīda augstuma vērtību izmaiņās.

## 2.6. Latvijas ģeoīda modeļa LV'98 salīdzinājums ar KTH un GGM

Izmantojot *KTH-Geolab* programmatūru, tika veikti vairāku Latvijas teritorijas ģeoīda modeļu aprēķini, mainot globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu maksimālo apraušanas robežu un virsmas integrācijas laukuma maksimālo sfērisko attālumu. Tika veikti Latvijas teritorijas ģeoīda modeļu aprēķini, izmantojot EGM2008 koeficientus līdz 360. pakāpei un virsmas integrācijas rādiusu 0.1 grāds, 0.25 grādi un 0.5 grādi. Tika veikti Latvijas teritorijas ģeoīda modeļu aprēķini, izmantojot EGM2008 koeficientus līdz 180. pakāpei un virsmas integrācijas rādiusu 0.25 grādi, 0.1 grāds un 3 grādi. Tika veikti Latvijas teritorijas ģeoīda modeļu aprēķini, izmantojot EGM2008 koeficientus līdz 120. pakāpei un virsmas integrācijas rādiusu 0.25 grādi, 0.1 grāds un 3 grādi. Kā arī tika veikti Latvijas teritorijas ģeoīda modeļu aprēķini, izmantojot EGM96 koeficientus līdz 360. pakāpei un virsmas integrācijas rādiusu 0.1 grāds. Rezultāti parādīti 2.1. tabulā.

Lai aptuveni novērtētu iegūto ģeoīda modeļu precizitāti, tika veikts to salīdzinājums ar Latvijas ģeoīda modeli LV'98. Salīdzinoši labākais rezultāts tika iegūts, izmantojot EGM2008 modeļa koeficientus līdz 360. pakāpei un virsmas integrācijas rādiusu 0.1 grāds, salīdzinājuma minimālā vērtība ir -1.39 m, maksimālā vērtība ir 0.41 m, vidējā vērtība ir -0.4586 m, standartnovirze ir 0.2873 m.

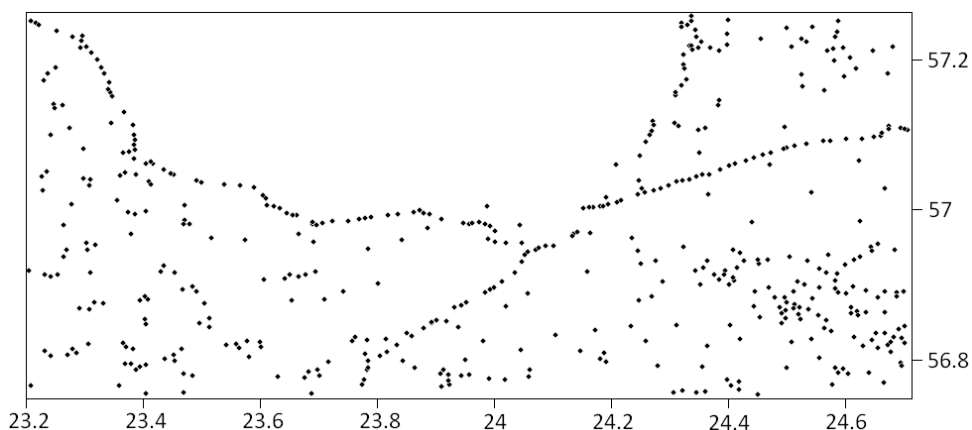
Atsevišķos literatūras avotos [65] [102] parādās ziņas, ka optimālais rezultāts var tikt sasniegts ar virsmas integrācijas rādiusu 3 grādi, bet iegūtie ģeoīda modeļi parāda, ka rezultāti uzlabojas, samazinot virsmas integrācijas laukumu. To varētu skaidrot ar faktu, ka Latvijas teritorijā nav ļoti izteiktu reljefa formu, reljefs ir pārsvarā līdzens vai viegli paugurains un šīs reljefa formas nerada plašu ietekmi uz gravitācijas lauku, līdz ar to lielākam virsmas integrācijas laukumam nav nozīmes.

Latvijas ģeoīda modeļa LV'98 augstumu salīdzinājums ar *KTH-Geolab* programmatūru  
iegūto ģeoīda modeļu augstumiem

| GGM_izv.pakāpe_int.rādiuss | Min (m)      | Max(m)      | Mean(m)        | Std.dev. (m)  |
|----------------------------|--------------|-------------|----------------|---------------|
| EGM96_360_0.1              | -1.51        | 1.27        | -0.2023        | 0.4487        |
| <b>EGM2008_360_0.1</b>     | <b>-1.39</b> | <b>0.41</b> | <b>-0.4586</b> | <b>0.2873</b> |
| EGM2008_360_0.25           | -1.75        | 0.81        | -0.4608        | 0.4318        |
| EGM2008_360_0.5            | -2.49        | 1.61        | -0.4789        | 0.7554        |
| EGM2008_180_0.25           | -2.21        | 1.20        | -0.4765        | 0.5786        |
| EGM2008_180_1.0            | -2.69        | 1.83        | -0.5091        | 0.8959        |
| EGM2008_180_3.0            | -3.68        | 1.97        | -0.7846        | 1.1930        |
| EGM2008_120_0.25           | -2.49        | 1.34        | -0.4725        | 0.7001        |
| EGM2008_120_1.0            | -2.77        | 1.92        | -0.5233        | 0.9593        |
| EGM2008_120_3.0            | -3.60        | 1.98        | -0.7695        | 1.1820        |

## 2.7. Rīgas rajona ģeoīda modeļa aprēķins

Pateicoties iespējai no Latvijas ģeotelpiskās informācijas aģentūras (LGIA) [117] saņemt Rīgas un tās apkārtnes reģiona gravimetrisko mērījumu datus (gravimetriskā punkta numurs, ģeodēziskās koordinātas uz rotācijas elipsoīda GRS80, Zemes smaguma spēka vērtības (IGSN71 sistēmā) reducētas uz punktu un punkta normālo augstumu BAS-77 sistēmā) reģiona robežās no 23°00'00'' Austrumu garuma līdz 24°54'00'' Austrumu garumam un no 56°34'48'' Ziemeļu platuma līdz 57°24'00'' Ziemeļu platumam, ir veikts eksperimentāls Rīgas reģiona ģeoīda aprēķins. Mērījumi Gr2 gravimetriskajos punktos ir sistemātiski veikti, sākot no 1999.gada, bet iepriekš tie veikti tikai epizodiski Dānijas un Baltijas valstu sadarbības programmas "Latvijas augstumu analīze un modernizācija" ietvaros [117].



2.6.att. LGIA gravimetrisko mērījumu punktu izvietojums Rīgas apkārtnē

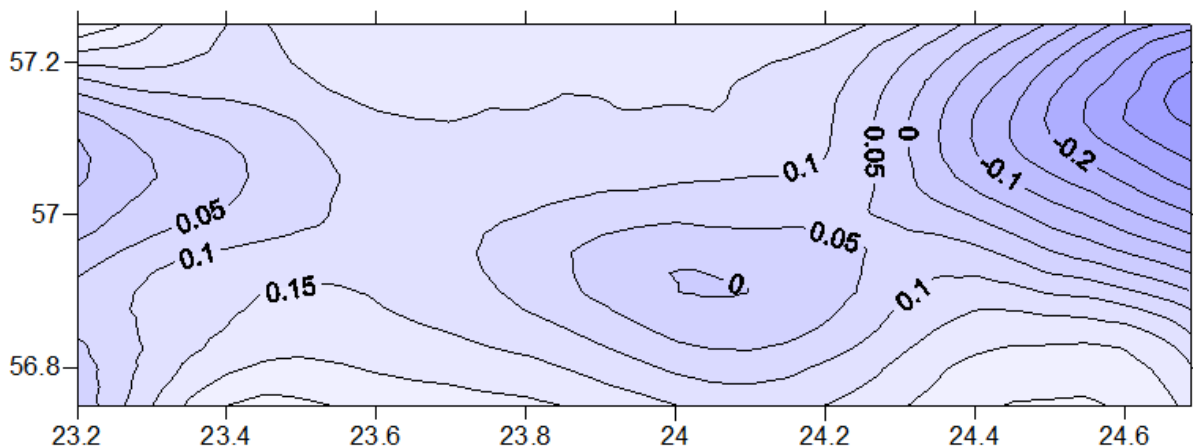
Saņemto datu precizitāte novērtēta ar 0.03 mGal. Saņemto datu punktu izvietojums attēlots 2.6. attēlā, un šo datu apgabals apgabals un aprēķināto ģeoīda augstumu apgabals attēlots 2.7. attēlā.



2.7.att. Gravimetrisko datu apgabals (sarkana līnija) un aprēķinātā ģeoīda apgabals (dzeltenā līnija)

Rīgas reģiona ģeoīda modeļa aprēķinam tika izmantoti EGM2008 koeficienti līdz 360. pakāpei un sfēriskās integrācijas rādiusa lielums - 0.1 grāds. Pēc rezultātu iegūšanas tika veikta 7 parametru transformācija, izmantojot 13 GNSS/nivelēšanas tīkla punktus. Lai aptuveni novērtētu iegūtā rezultāta precizitāti, atlikušos reģionā esošos GNSS/nivelēšanas punktus izmantoju kvalitātes kontrolei, kopumā 19 punktus. Pēc šiem punktiem maksimālā

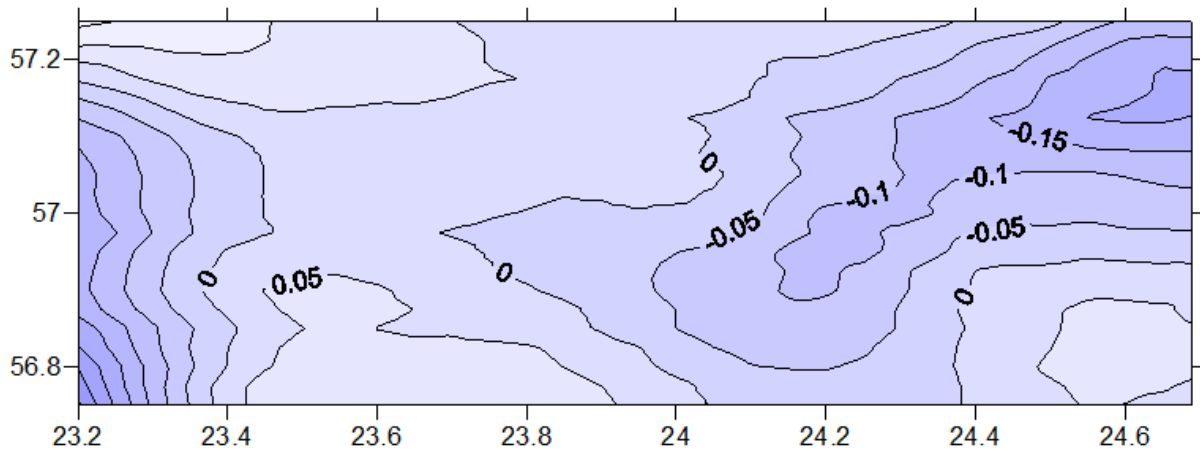
nesakritība ir 12.5 cm, minimālā – 2.4 cm, vidējā vērtība – 6.9 cm, bet vidējā kvadrātiskā kļūda – 7.5 cm. Aptuvenam novērtējumam veicu arī salīdzinājumu ar LV'98 ģeoīda modeli.



2.8. att. LV'98 un KTH EGM2008 ģeoīda augstumu salīdzinājums risinājumiem Rīgas reģionā [m]

Salīdzinājuma nesaistes minimums ir -0.379m, maksimums ir 0.298m, vidējā vērtība ir 0.075m, standartnovirze ir 0.121m. Lielākās nesakritības vērojamas Rīgas jūras līča reģionā, kas varētu būt skaidrojams ar gravimetrisko mērījumu trūkumu šajā reģionā [54]. Nesakritība redzama arī reģiona ziemeļaustrumu un rietumu daļā, tās cēlonis ir meklējams.

Vēl viens testa aprēķins Rīgas reģiona ģeoīda modelim tika veikts, izmantojot GOCE GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R4 [9] modeļa koeficientus līdz 260. pakāpei un sfēriskās integrācijas rādiusa lielumu - 0.1 grāds. GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R4 modelis ir jaunākais no GOCE satelīta datu modeļiem. Pēc rezultātu iegūšanas tika veikta 7 parametru transformācija, izmantojot 13 GNSS/nivelēšanas tīkla punktus Rīgas reģionā. Lai aptuveni novērtētu iegūtā rezultāta precizitāti, atlikušos reģionā esošos GNSS/nivelēšanas punktus izmantoju kvalitātes kontrolei, kopumā 21 punktu. Pēc šiem punktiem maksimālā nesakritība ir 4.2 cm, minimālā – -8.7 cm, vidējā vērtība – -3.0 cm, bet vidējā kvadrātiskā kļūda – 5.0 cm. Aptuvenam novērtējumam veicu arī salīdzinājumu ar LV'98 ģeoīda modeli.



2.9. att. LV'98 un KTH GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R4 ģeoīda augstumu salīdzinājums risinājumiem Rīgas reģionā [m]

Salīdzinājuma nesaistes minimums ir -0.359m, maksimums ir 0.165m, vidējā vērtība ir -0.020m, standartnovirze ir 0.078m. Līdzīgi kā iepriekš, nesakritība redzama arī reģiona ziemeļaustrumu un rietumu daļā, savukārt, izpaliek nesakritība Rīgas jūras līča reģionā. Var secināt, ka Rīgas reģionā GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R4 modeļa atbilstība ir labāka, nekā EGM2008 modelim.

### 3. DFHRS ĢEOĪDA APRĒĶINU METODE

Vācijas Karlsrūhes lietišķo zinātņu universitātes (*University of Applied Sciences – HSKA*) DFHRS (*Digital Finite-element Height Reference Surface*) jeb Digitālās galīgo elementu augstuma referencvirsmas izpētes projekta mērķis ir parametru modelēšana un augstuma referencvirsmas (*Height Reference Surface – HRS*) jeb ģeoīda virsmas aprēķins, izmantojot ģeometrisko un fizisko novērojumu komponentes [114]. To panāk, izmantojot hibrīd-izlīdzināšanas pieeju. Kā pamatdati tiek izmantoti globālie vai reģionālie Zemes gravitācijas lauka modeļi un GNSS/nivelēšanas punktu augstumu vērtības, kas ļauj piesaistīt Zemes gravitācijas lauka modeli vietējai augstumu sistēmai [27].

Pieeju ģeoīda virsmas modeļa parametriem nodrošina DFHRS datu bāze, kas ļauj tiešā veidā veikt GNSS elipsoidālo augstumu  $h$  pārveidošanu uz standarta (normālo) augstumu  $H$ . DFHRS datu bāzes var izmantot tiešsaistes GNSS augstumu noteikšanai DGNS tīklos (SAPOS, EUPOS u.t.t). DFHRS pieeja izmantota šādu datu bāzu izveidei vairākās Vācijas pavalstīs, kā arī citās Eiropas un pasaules valstīs.

DFHRS ģeoīda virsmu apzīmē kā  $N = N(p|B, L, h)$ . Ģeoīda virsmas parametrus  $p$  ietver DFHRS datu bāze (DFHRS\_DB). DFHRS\_DB var izmantot tiešā veidā GNSS uztvērējā vai arī izveidojot RTCM transformācijas ziņojumus GNSS augstumu noteikšanai. Atkarībā no augstumu sistēmas tipa, fiziskos augstumus  $H$  sauc par ortometriskajiem augstumiem, normālajiem augstumiem (Eiropas augstumu sistēmā) vai arī sfēriskajiem normālajiem augstumiem ( $NN$ ). Atbilstošā ģeoīda virsma, apzīmēta ar  $N$ , ir attiecīgi vai nu ģeoīds, kvaziģeoīds, vai  $NN$  virsma.  $N$  vienmēr ir ģeoīda augstums virs referencilipsoīda.

Galvenais DFHRS projekta mērķis, attīstot integrētu pieeju ģeoīda vai kvaziģeoīda virsmas aprēķiniem, ir dot iespēju elipsoidālo GNSS augstumu  $h$  pārveidei uz „jūras līmeņa” jeb normālo augstumu  $H$  tiešas transformācijas veidā  $H = h - N$ . DFHRS programmatūra sākotnēji veidota C++ programmēšanas valodā, darbs pie tās tika uzsākts 2000.gadā, bet tālākais darbs turpināts, izmantojot *Visual Studio 2010*. DFHRS rīku programmatūra DFHRS-Tools tiek izmantota DFHRS\_DB pieejai, lai veiktu transformāciju no  $(B, L, h)$  uz  $(B, L, H)$ .

DFHRS koncepcijā virsma tiek sadalīta mazākos galīgajos elementos – „režģī”. Ģeoīda virsma  $N$  katrā režģa elementā tiek aprēķināta ar polinomu ar pakāpi  $l$  izejot no  $(x, y)$  koordinātām:



$$N(p_k) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{l-i} a_{ij,k} \cdot y^i x^j = f^T \cdot p_k, \quad (3.1)$$

kur  $f$  ir dizaina matrica un  $p$  ir polinoma parametru matrica.

Virsmai starp diviem tuvējiem režģa elementiem ar kopēju robežu jābūt nepārtrauktai un vienlaidu, tāpēc starp režģa elementiem tiek ieviesti nepārtrauktības nosacījumi ar  $C_0$ ,  $C_1$  un  $C_2$  nepārtrauktības līmeņiem. Nepārtrauktības līmenis  $C_0$  norāda vienādas funkcionālās vērtības uz kopējas blakus esošu režģa elementu robežas.  $C_1$  norāda tās pašas tangenciālās plaknes un  $C_2$  norāda to pašu izliekumu pa kopējo ģeoida virsmas modeļa režģa elementu robežu.

$$N_{FEM} = \left\{ \begin{array}{l} N(p_k) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{l-i} a_{ij,k} \cdot y^i x^j = f^T \cdot p_k \\ C_{0,1,2}(p_m; p_n) \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

Režģa elementu grupa veido laukumu nogabalu. Tie tiek veidoti, lai samazinātu vidējo vai garo viļņu sistemātisko efektu ģeoida augstuma novērojumos  $N$  un vertikāles novirzēs no globālajiem Zemes gravitācijas lauka modeļiem. Laukumi tiek saistīti ar individuālu parametru kopu, kas nosaka koordinātu sistēmas parametrizāciju. Tas ļauj lietot sistēmas korekcijas katram laukumam.

Dažām vecākām augstumu sistēmām  $H$  tiek papildus apsvērts arī mēroga atšķirības faktors  $\Delta m$ , tāpēc DFHRS  $N$  modelis sastāv no divām daļām. GNSS augstumu  $H$  noteikšana pieprasa ievadīt ar GNSS noteikto augstumu  $h$  DFHRS korekcijai  $N$ :

$$H = h - N = h - DFHRS(p, \Delta m | B, L, h) = h - (NFEM(p | B, L) + \Delta m, h). \quad (3.3)$$

Aprēķinātie parametri tiek saglabāti DFHRS-DB datu bāzē. Ar DFHRS aprēķinātie augstumi  $N = DFHRS(B, L, h)$  tiek nodrošināti ar šīs datu bāzes palīdzību, kas ietver sevī ģeoida virsmas parametrus  $(p, \Delta m)$  kopā ar režģa un laukumu dizaina informāciju. DFHRS-DB ir kļuvusi par industriālu lietotāju standartu visiem GNSS uztvērēju tiem un var tikt izmantota arī jaunu RTCM transformācijas ziņojumu izveidei.

DFHRS programmatūras pirmajā attīstības periodā ģeoīda vai Zemes gravitācijas lauka modeļu netransformēti ģeoīda vai kvaziģeoīda augstumi  $N$ , novērotās astronomiskās vai no GGM aprēķinātās vertikāles novirzes, kā arī atbalsta punkti  $(B, L, h|H)$  tiek lietoti kā novērojumu grupas vienkāršam mazāko kvadrātu aprēķinam, lai novērtētu DFHRS-DB parametrus  $p$  un  $\Delta m$ . Tiek pieņemts, ka adekvāta stohastiska modeļa gadījumā gravimetrisko ģeoīda vai uz Stoksa metodi balstītu kvaziģeoīda modeļu  $N$  lietošana kopā ar kovariances informāciju ir vienlīdzīga ar oriģināliem gravitācijas vērtību  $g$  mērījumiem.

Matemātiskais modelis DFHRS-DB parametru aprēķinam dots formulās (3.4a - 3.4f).

Elipsoidālo augstumu  $h$  novērojumi:

$$h + v = H + h \cdot \Delta m + N_{FEM}(p|x, y), \quad (3.4a)$$

kur  $N_{FEM}(p|x, y) = f(x, y)^T \cdot p$ , kovariances matrica  $C_h = \text{diag}(\sigma_h^2)$ .

Ģeoīda augstumu novērojumi:

$$N_G(B, L)^j + v = f(x, y)^T \cdot p + \partial N_G(d^j), \quad (3.4ba)$$

kur reālā kovariances matrica  $C_{N_G}$ .

Vertikāles novirzes  $(\eta, \xi)$ , novērotas ar zenītkameru vai atvasinātas no globālā Zemes gravitācijas lauka modeļa:

$$\xi^j + v = -f_B^T \left| (M(B) + h) \cdot p + \partial \xi \left( d_{\xi, \eta}^j \right) \right. \quad (3.4c)$$

$$\eta^j + v = -f_L^T \left| ((N(B) + h) \cdot \cos(B)) \cdot p + \partial \eta \left( d_{\xi, \eta}^j \right) \right. \quad (3.4d)$$

Fiziskā augstuma  $H$  novērojumi:

$$H + v = H, \quad (3.4e)$$

kur kovariances matrica  $C_H = \text{diag}(\sigma_H^2)$ .

Nepārtrauktības nosacījumi kā pseido-novērojumi ar mazām variancēm, bet lielu svērto vērtību:

$$C + v = C(p). \quad (3.4f)$$

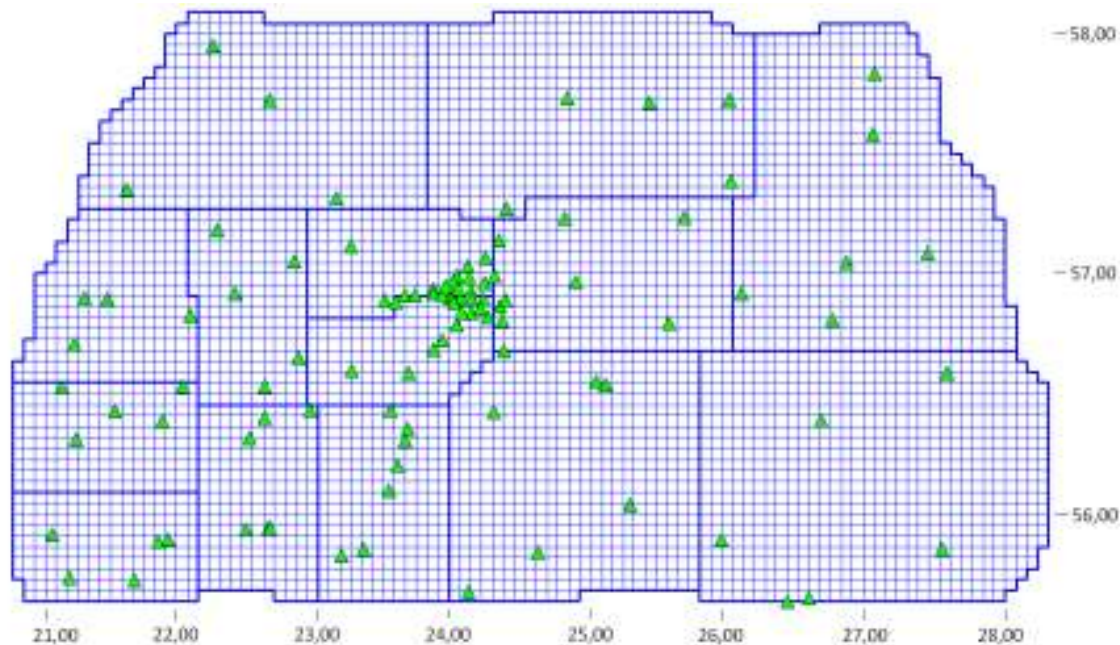
Ar  $B$  un  $L$  tiek apzīmēts ģeogrāfiskais platums un garums.  $(x, y)$  ir projekcijas koordinātas. Ar  $f_B$  un  $f_L$  apzīmē atvasinājumus no  $f(x(B, L), y(B, L))$ .  $M(B)$  un  $N(B)$  attiecīgi apzīmē vidējo meridiāna rādiusu un normāles liekumu ģeogrāfiskajā platumā  $B$ . Kā ievades dati tiek pievienoti arī atbalsta punkti  $(B, L, h|H)$ . Mazāko kvadrātu novērtējumā, saistītā ar matemātisko modeli (4a-4f), tiek izmantots ģeoīda modelis, piemēram, EGM2008, vai Eiropā – EGG97 [47].

### 3.1. Latvijas ģeoīda modeļa izstrāde

DFHRS programmatūra tika izmantota arī Latvijas augstuma referencvirsmas aprēķiniem. Kā ievades dati tika izmantots Eiropas gravimetriskais ģeoīda modelis EGG97 (*European Gravimetric Geoid Model 1997*). EGG97 pamatojas uz augstas izšķirtspējas gravitācijas un Zemes datiem, kas bija pieejami 1997.gadā, kā arī uz globālo Zemes gravitācijas lauka modeli EGM96. Veikts EGG97 modeļa izvērtējums Lietuvas teritorijā, un tā precizitāte Lietuvā ir 3 cm [10].

Lai nodrošinātu sistēmas definīciju, tika izmantoti 102 GNSS/nivelēšanas punktu dati kā atbalsta punkti ar zināmiem augstumiem gan GNSS, gan valsts (ortometriskajā) augstumu sistēmā. Lielākā daļa no tiem atrodas Latvijas valsts teritorijā, 2 punkti atrodas Igaunijā un 17 punkti Lietuvā, tuvu robežai ar Latviju. Punkti Lietuvā un Igaunijā izmantoti, jo liela nozīme ir starpvalstu vienotai augstumu sistēmai [73], šobrīd norisinās Latvijas pāreja uz EVRS2007 sistēmu.

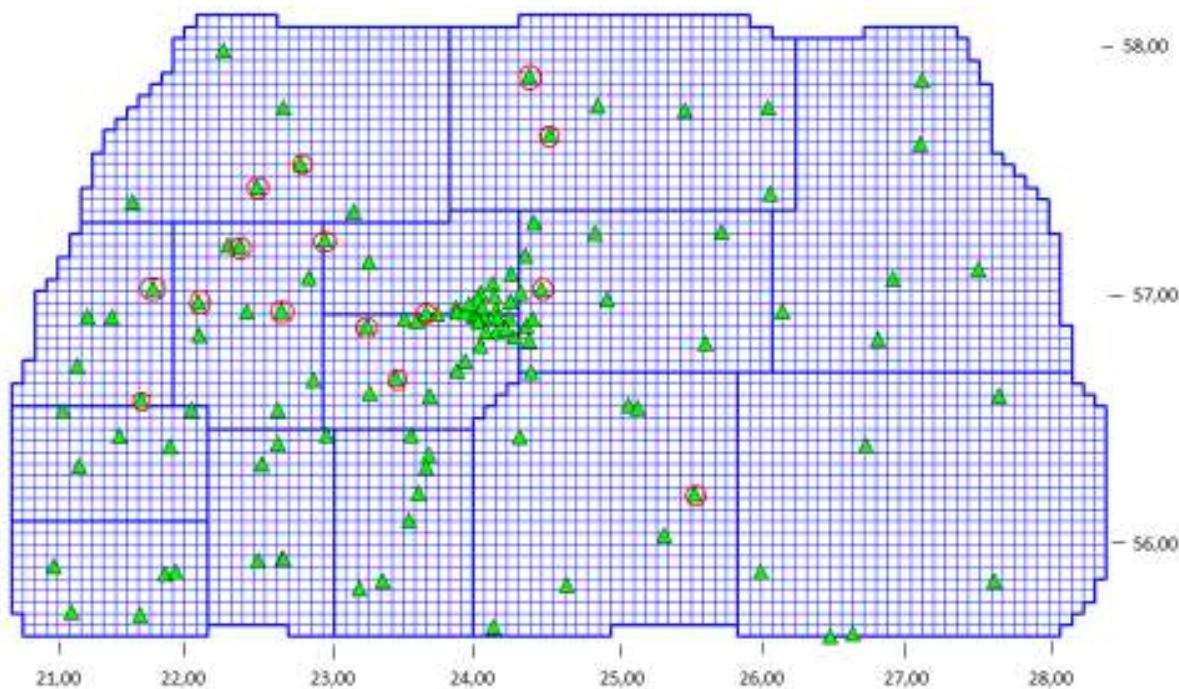
Plānotais režģa elementu lielums ir 5 x 5 km, kopējais režģa elementu skaits ir 4601 visam aprēķinu laukumam. Nogabalu laukumu izmēri atšķiras atkarībā no atbalsta punktu izvietojuma un blīvuma (no 80 x 40 km līdz 150 x 100 km). Katram laukumam jāietver vismaz 4 atbalsta punkti, lai nodrošinātu sistēmas definīciju. 3.1. attēlā tievās zilās līnijas attēlo režģa elementus, biezās zilās līnijas – laukumu robežas un zaļie trīsstūri – atbalsta punktus. Katrā režģa elementā 25 punktiem tiek atrastas ģeoīda ondulācijas un vertikāles noviržu vērtības.



3.1. att. Aprēķinu modeļa dizains Latvijas DFHRS risinājumam

DFHRS programmatūra nodrošina iekšējo kvalitātes kontroli atbalsta punktiem. Funkcionālie modeļi (3.4a - 3.4f) formulās parāda labi noteiktu vienādojumu sistēmu attiecībā pret parametriem un pieprasa parametru novērtējumu atlikušajai vienādojumu sistēmai. DFHRS programmatūra atrisina attiecīgo parametru novērtējumu ar mazāko kvadrātu izlīdzināšanu. Tas ir optimāls risinājums kā M-novērtējums (*Maximum-Likelihood*) parametru novērtējums. Pamatojoties uz M-novērtējumu, kvalitātes kontrole un kvalitātes indikatori var tikt uzdoti kā statistikas tests visiem atsevišķajiem novērojumiem.

Šī iemesla dēļ Latvijas ģeoīda virsmas aprēķina procedūra tika atkārtota trīs reizes, pēc pirmās un otrās reizes izslēdzot GNSS/nivelēšanas atbalsta punktus ar iekšēji noteiktajām nesaistēm, lielākām par 3 cm. Lielākā daļa izslēgto atbalsta punktu atrodas Latvijas ziemeļrietumu daļā, Kurzemē. Kopumā tika izslēgti 15 GNSS/nivelēšanas atbalsta punkti, kas 3.2. attēlā norādīti ar sarkaniem aplīšiem.



3.2 att. DFHRS risinājuma gaitā izslēgtie GNSS/nivelēšanas atbalsta punkti (iekšēji noteiktās nesaistes > 3 cm)

Aprēķiniem tika izmantots trešās pakāpes polinoms. No EGG97 modeļa tika iekļautas gan ģeoīda ondulācijas (kopējais skaits – 115025), gan vertikāles novirzes (kopējais skaits – 230050). Nepārtrauktības parametru skaits – 65227. Nezināmo polinomu parametru skaits - 46010. Atlikušo parametru skaits (novērojumi – nezināmie) - 364311.

### 3.2. Ģeoīda aprēķina rezultāti un salīdzinājums ar EGG97 un citiem GGM

Iegūtā ģeoīda virsma tika salīdzināta ar Latvijas gravimetrisko ģeoīda modeli LV'98, kuru plaši izmanto mērniecībā un zinātnē jau vairāk nekā 10 gadus. Šī modeļa aprēķiniem tika izmantoti gravimetriskie mērījumi, digitizēti gravimetriskie dati, kā arī satelītu altimetrijas dati virs Baltijas jūras. Aprēķini veikti, izmantojot GRAVSOFT programmu paketi, kas balstās uz Stoksa metodi. Precizitātes novērtējums LV'98 ģeoīda modelim ir 6-8 cm [57].

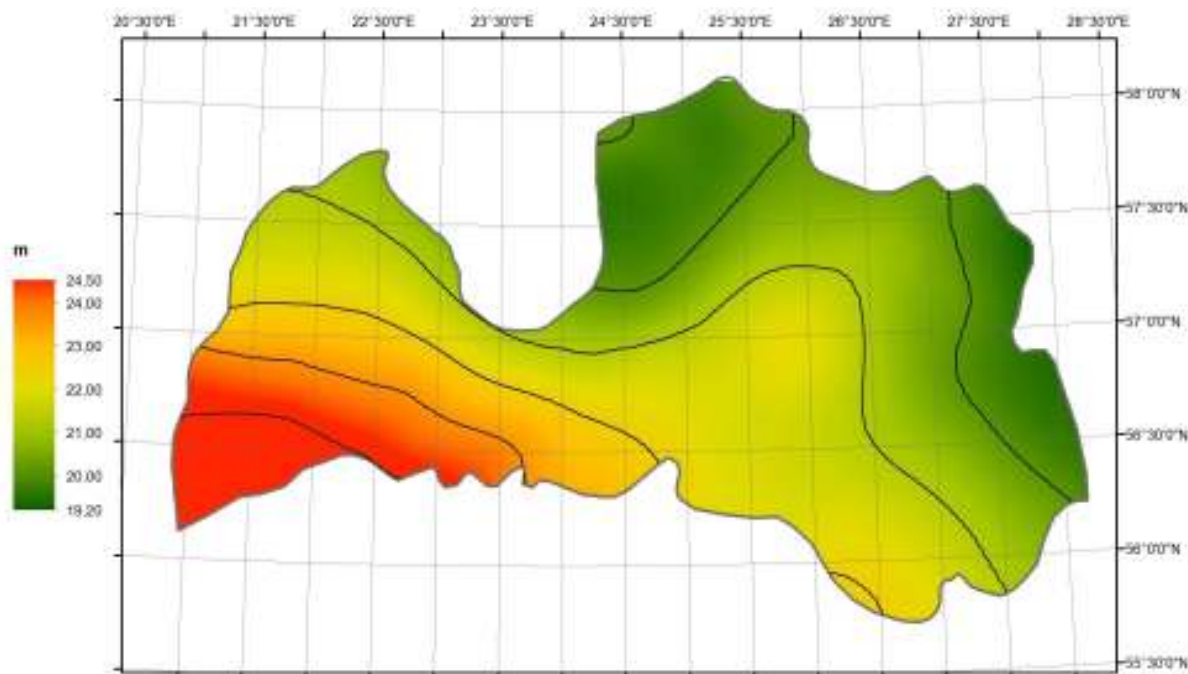
Salīdzinājums tika veikts starp ģeoīda virsmu, aprēķinātu ar DFHRS programmatūru, un EGG97, EGM2008 [78] [79], Eigen5c [22] [115], Eigen6c [23], GOCE GO\_CONS\_GFC\_2\_DIR\_R3 [7] [8] [69] [76] [81] [84] [113] globālajiem Zemes gravitācijas lauka modeļiem, kā arī tika veikts salīdzinājums starp LV'98 un pieminētajiem modeļiem. Tā kā globālie Zemes gravitācijas lauka modeļi nav piesaistīti Latvijas nacionālajai augstumu sistēmai, tika veikts to transformācijas parametru aprēķins un transformācija, izmantojot 13

GNSS/nivelēšanas punktu datus, kas tika izvēlēti, pamatojoties uz DFHRS iekšējās kvalitātes kontroles datiem, kā arī to vienmērīgu izvietojumu:

$$\begin{aligned}
 h - H = N_G - & \left[ [\cos(L) \cdot \cos(B)] \cdot (u - u_G) + [\cos(B) \cdot \sin(L)] \right. \\
 & \cdot (v - v_G) + [\sin(B)] \cdot (w - w_G) \\
 & + [e^2 \cdot N \cdot \sin(B) \cdot \cos(B) \cdot \sin(L)] \cdot (e_x - e_{x,G}) \\
 & + [-e^2 \cdot N \cdot \sin(B) \cdot \cos(B) \cdot \cos(L)] \cdot (e_y - e_{y,G}) \\
 & \left. + [h + W^2 \cdot N] \cdot \Delta m + [N_G + W^2 \cdot N] \cdot \Delta m_G \right], \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

kur punkta pozīciju apzīmē ģeogrāfiskais platums un garums ( $B, L$ ),  $h$  ir elipsoidālais augstums,  $H$  ir ortometriskais augstums,  $N_G$  ir ģeoīda augstums,  $N$  ir Zemes liekuma normālais rādiuss,  $W = a/N$ ,  $e^2 = 2f - f^2$  ( $a$  = galvenā ass,  $f$  = referencilipsoīda GRS80 saplakums), trīs translācijas parametri ( $u - u_G, v - v_G, w - w_G$ ), divi rotācijas parametri ( $e_x - e_{x,G}, e_y - e_{y,G}$ ) horizontālajā plaknē un mēroga atšķirības parametri ( $\Delta m, \Delta m_G$ ) [49].

Aprēķina rezultātā iegūtais ģeoīda augstums Latvijas teritorijā mainās no 19.20 m ziemeļrietumos līdz 24.50 m dienvidrietumos.



3.3. att. Aprēķinātā DFHRS ģeoīda augstumu referencvirsmā Latvijas teritorijai

Lai spriestu par iegūtā DFHRS modeļa precizitāti, izejot no aprēķinos izmantotajiem 102 GNSS/nivelēšanas punktiem, tika aprēķinātas nesaistes. Rezultāts parādīts 3.1. tabulā.

3.1. tabula

GNSS/nivelēšanas atbalsta punktu nesaistes statistika ( $2\sigma$  - 95% no atbalsta punktiem)

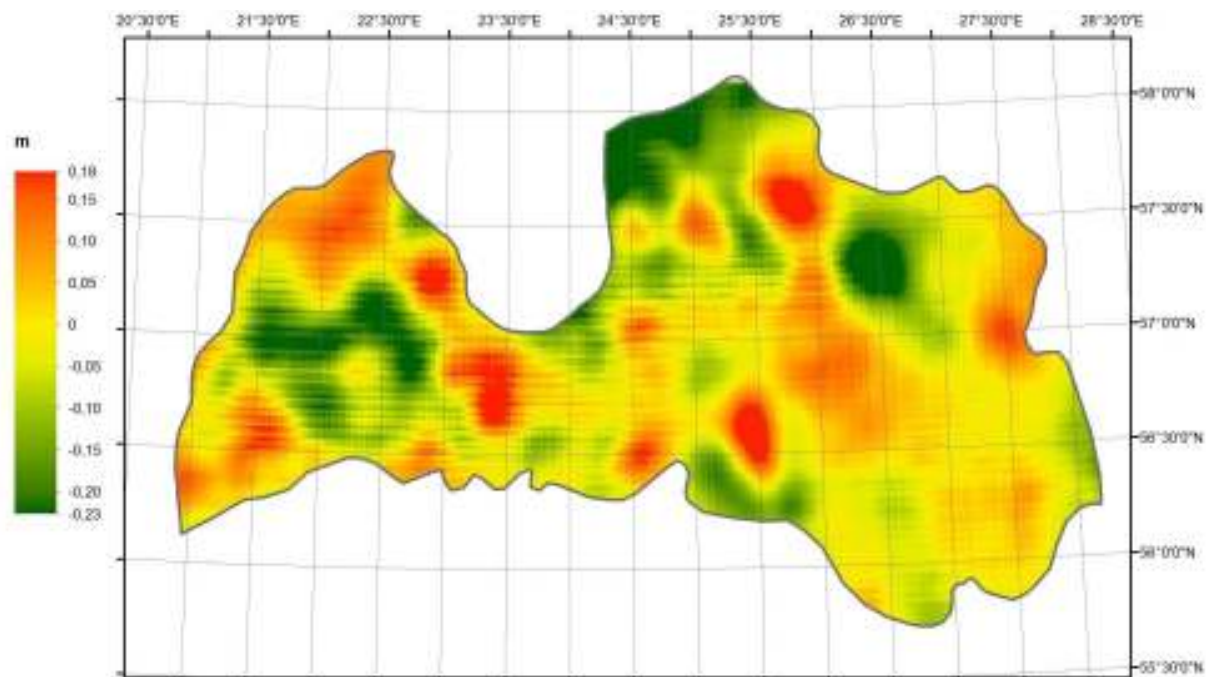
| Modelis              | Min (m) | Max (m) | RMSE (m) |
|----------------------|---------|---------|----------|
| DFHRS                | -0.036  | 0.034   | 0.016    |
| LV'98                | -0.042  | 0.040   | 0.016    |
| EGG97                | -0.078  | 0.074   | 0.037    |
| EGM2008              | -0.085  | 0.079   | 0.042    |
| Eigen6c              | -0.151  | 0.125   | 0.055    |
| Eigen5c              | -0.162  | 0.317   | 0.153    |
| GO_CONS_GFC_2_DIR_R3 | -0.662  | 0.745   | 0.346    |

Pēc EGG97 un globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu transformācijas tika veikts salīdzinājums starp šiem modeļiem un DFHRS risinājumu, kā arī LV'98 modeli (3.2. tabula).

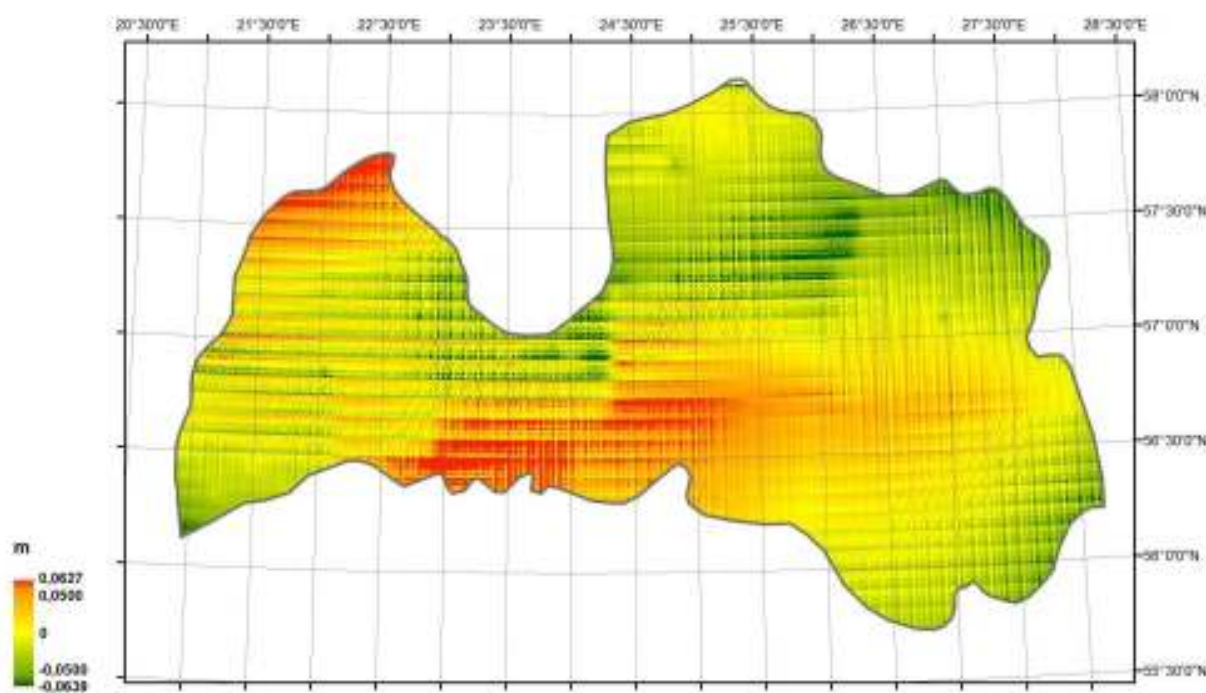
3.2. tabula

DFHRS risinājuma un LV'98 ģeoīda augstumu salīdzinājums ar GGM ģeoīda augstumiem

| Modeļi                         | Min (m) | Max (m) | Average (m) | STDEV (m) |
|--------------------------------|---------|---------|-------------|-----------|
| LV'98-EGG97                    | -0.257  | 0.211   | 0.000       | 0.058     |
| LV'98-EGM2008                  | -0.138  | 0.134   | -0.033      | 0.044     |
| LV'98-Eigen6c                  | -0.203  | 0.201   | 0.018       | 0.063     |
| LV'98-Eigen5c                  | -0.211  | 0.480   | 0.142       | 0.123     |
| LV'98-<br>GO_CONS_GFC_2_DIR_R3 | -0.461  | 1.077   | 0.393       | 0.272     |
|                                |         |         |             |           |
| DFHRS-EGG97                    | -0.064  | 0.063   | -0.013      | 0.017     |
| DFHRS-EGM2008                  | -0.278  | 0.179   | -0.046      | 0.052     |
| DFHRS-Eigen6c                  | -0.233  | 0.188   | 0.005       | 0.064     |
| DFHRS-Eigen5c                  | -0.206  | 0.672   | 0.130       | 0.115     |
| DFHRS-<br>GO_CONS_GFC_2_DIR_R3 | -0.460  | 1.030   | 0.381       | 0.266     |

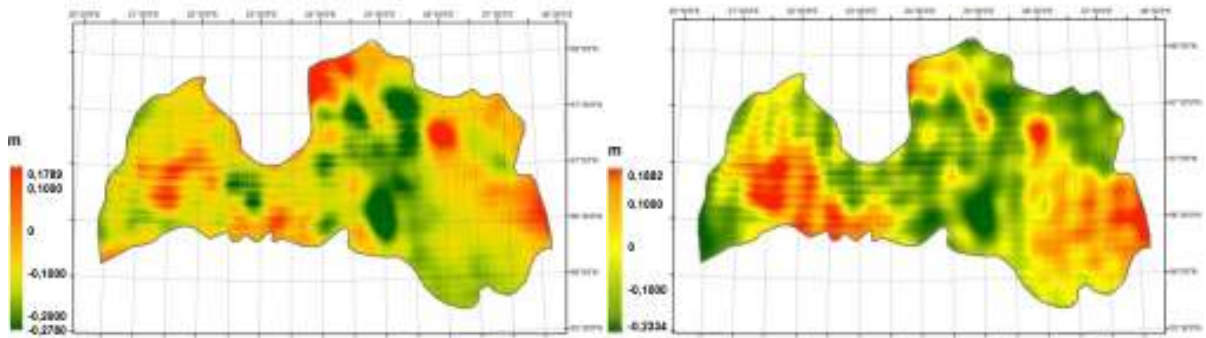


3.4. att. Starpība starp LV'98 un DFHRS risinājumu ģeoīda augstumiem. Min: -0.227m, max: 0.177m, vidējais 0.007 m, STDEV 0.053m

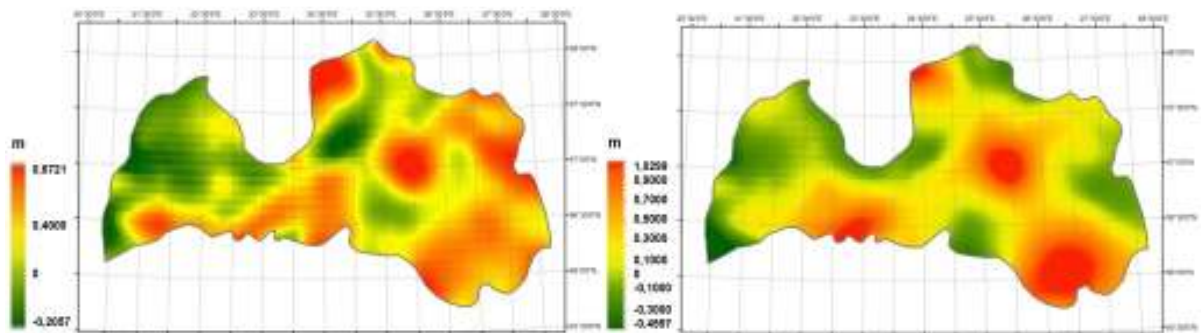


3.5. att. Starpība starp DFHRS risinājuma un EGG97 modeļa ģeoīda augstumiem

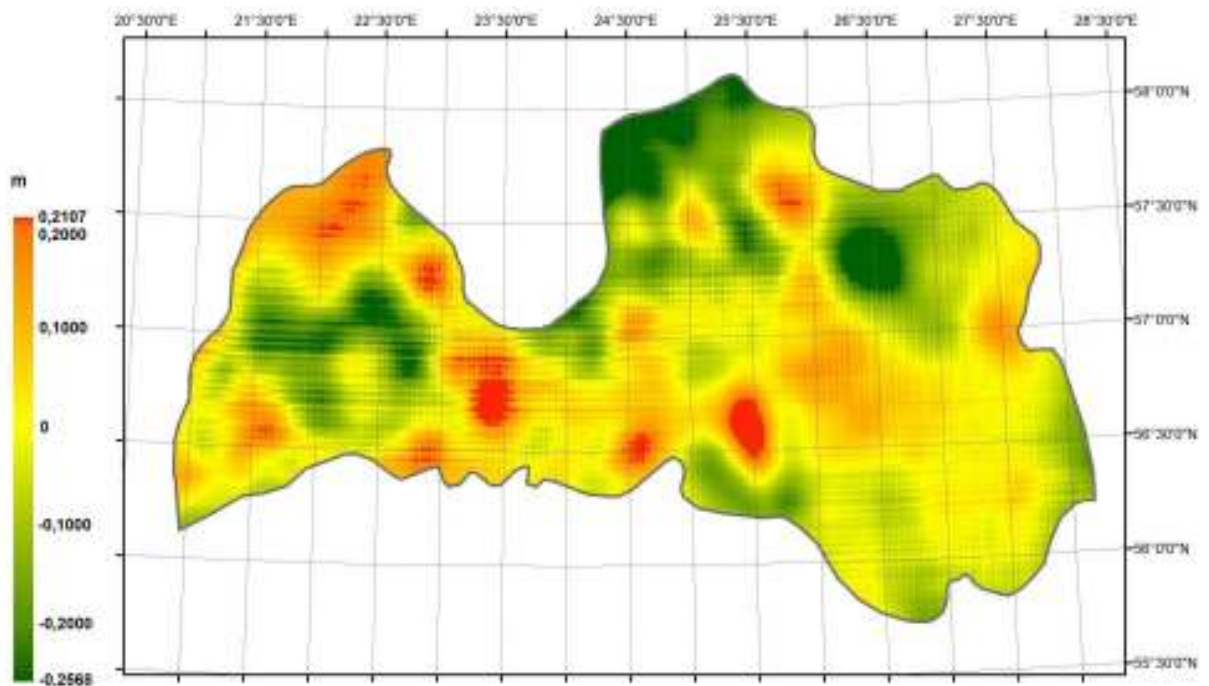




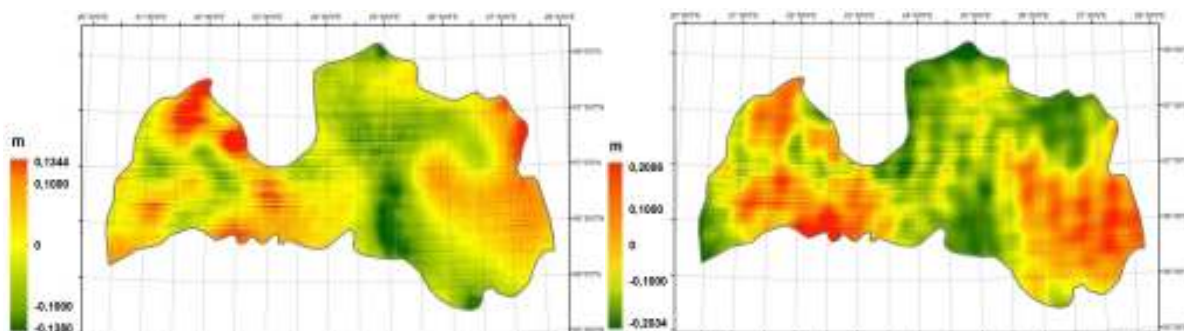
3.6. att. Starpība starp DFHRS risinājuma un EGM2008 modeļa (pa kreisi)/ DFHRS risinājuma un Eigen6c modeļa (pa labi) ģeoīda augstumiem



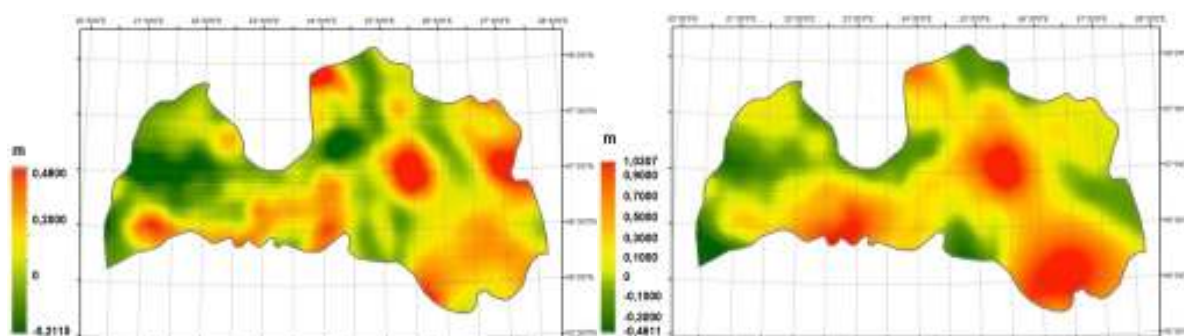
3.7. att. Starpība starp DFHRS risinājuma un Eigen5c modeļa (pa kreisi) / DFHRS risinājuma un GO\_CONS\_GFC\_2\_DIR\_R3 modeļa (pa labi) ģeoīda augstumiem



3.8. att. Starpība starp LV'98 un EGG97 modeļu ģeoīda augstumiem



3.9. att. Starpība starp LV'98 un EGM2008 (pa kreisi) / LV'98 un Eigen6c modeļu (pa labi) ģeoīda augstumiem



3.10. att. Starpība starp LV'98 un Eigen5c (pa kreisi) / LV'98 un GO\_CONS\_GFC\_2\_DIR\_R3 modeļu (pa labi) ģeoīda augstumiem

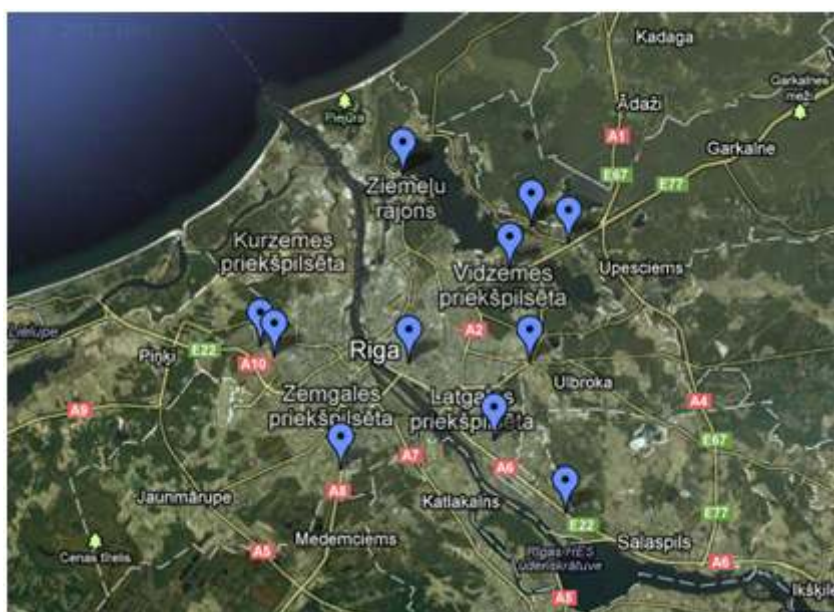
### 3.3. Kvalitātes kontrole

3.3.tabulā parādīti trīs pirmās klases nivelēšanas punkti kvalitātes kontrolei, kas netika izmantoti Latvijas ģeoīda virsmas aprēķinos. Kā piemērs tika ņemta Moldovas DFHRS ģeoīda virsmas kvalitātes kontrole [48]. GNSS kontroles mērījumi tika veikti 14.12.2012. kā 4 stundu statistiskie mērījumi, un tos vadīja Latvijas Lauksaimniecības Universitātes Lauku inženieru fakultātes speciālisti.  $H_{levelling}$  BAS-77 vērtības (Baltijas Augstumu Sistēma 1977) tika ņemtas no Latvijas Ģeotelpiskās Informācijas aģentūras datu bāzes [117]. 3.3. tabula dod pārskatu GNSS kontroles mērījumu  $h_{ellipsoidal}$  un  $H_{levelling}$  salīdzinājumam ar  $N_{DFHRS}$ . Nesaistes starp  $H_{levelling}$  un  $H_{GNSS} = h_{ellipsoidal} - N_{DFHRS}$  ir no 0 cm līdz 2.6 cm.

11 nivelēšanas kontroles punkti, kas netika izmantoti Latvijas ģeoīda virsmas aprēķinos, tika izvēlēti Rīgas pilsētas teritorijā (3.11. attēls). Šie punkti uzskatāmi par stabiliem Rīgas pilsētas nivelēšanas tīkla punktiem (grunts reperi),  $H_{levelling(1977)}$  vērtības tika ņemtas no 1975–1977. gada 2. klases nivelēšanas kataloga [21],  $h_{ellipsoidal}$  vērtības tika iegūtas GNSS RTK mērījumu sesiju laikā 2010. gadā [5].

Pirmās klases nivelēšanas punkti kvalitātes kontrolei

| 1.klases nivelēšanas punkts, Nr | Nivelēšanas gads | Platums  | Garums   | $h_{\text{ellipsoidāls}}$ (m) | $H_{\text{levelling}}$ (m) | $N_{\text{DFHRS}}$ (m) | Nesaiste ar $N_{\text{DFHRS}}$ (m) |
|---------------------------------|------------------|----------|----------|-------------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------------|
| Mērsrags, 1636                  | 2007             | 57.38516 | 22.97266 | 27.620                        | 6.890                      | 20.704                 | 0.026                              |
| Vāne, 1155                      | 2007             | 56.94707 | 22.44686 | 116.975                       | 94.480                     | 22.495                 | 0.000                              |
| Eleja, 1727                     | 2005             | 56.41508 | 23.69842 | 55.359                        | 32.380                     | 23.001                 | -0.022                             |



3.11. att. Izvēlētie nivelēšanas punkti kvalitātes kontrolei Rīgas pilsētā

3.4.tabula dod pārskatu par GNSS RTK mērījumu un nivelēšanas kataloga vērtību salīdzinājumu ar DFHRS gēoīda virsmas vērtībām. Salīdzinājuma vidējā nesaiste ir -4.9 cm. Tomēr, kopš 1977. gada, Rīgas nivelēšanas tīklam nav veikt kontrole. Pamatojoties uz G.Silabrieža veikto pētījumu [85], Rīgas pilsētas nivelēšanas tīkls ir ievērojami deformējies. 3.4. tabula parāda augstumu nesaistes starp  $H_{GNSS} = h_{\text{ellipsoidāls}} - N_{DFHRS}$  un  $H_{\text{levelling}(1977)}$ , kas ataino augstumu deformācijas kā 5 cm grimšanu kopš 1975.-1977. gada.

Ar GNSS RTK tehnoloģiju un DFHRS ģeoīdu noteikto normālo augstumu salīdzinājums ar 1977.gada nivelēšanā noteiktajiem normālajiem augstumiem

| Punkta Nr | Platums  | Garums   | $h_{\text{ellipsoidā}} \text{ (m)}$ | $H_{\text{levelling(1977)}} \text{ (m)}$ | $N_{\text{DFHRS}} \text{ (m)}$ | Nesaiste ar $H_{\text{levelling(1977)}} \text{ (m)}$ |
|-----------|----------|----------|-------------------------------------|--|--------------------------------|--|
| 5715      | 56.90561 | 24.21107 | 32.890                              | 11.811                                   | 21.116                         | -0.037   |
| 1193      | 56.86987 | 24.27417 | 31.844                              | 10.566                                   | 21.258                         | 0.020  |
| 915       | 56.94540 | 24.01676 | 32.804                              | 11.823                                   | 21.036                         | -0.055   |
| 3389      | 56.89100 | 24.07539 | 33.490                              | 12.314                                   | 21.213                         | -0.038   |
| 8540      | 57.03301 | 24.13018 | 30.232                              | 9.623                                    | 20.682                         | -0.072   |
| 37        | 57.00825 | 24.24445 | 27.707                              | 7.042                                    | 20.728                         | -0.063   |
| 938       | 57.00033 | 24.27682 | 34.027                              | 13.328                                   | 20.756                         | -0.058   |
| 3336      | 56.94287 | 24.24295 | 30.359                              | 9.439                                    | 20.976                         | -0.056   |
| T8        | 56.94285 | 24.13518 | 25.691                              | 4.746                                    | 20.997                         | -0.052   |
| 0895      | 56.95117 | 24.00392 | 29.418                              | 8.415                                    | 21.021                         | -0.017   |
| 868       | 56.98750 | 24.22432 | 29.513                              | 8.736                                    | 20.814                         | -0.037   |
|           |          |          |                                     |  | <b>RMS</b>                     | <b>-0.0489</b>                                       |

Rezultātā var secināt, ka Latvijas teritorijai aprēķinātā ģeoīda virsma sasniedz 1.6 cm vidējo kvadrātisko kļūdu. Mainot ievades parametrus, piemēram, režģa un laukumu lielumu, ir iespējams uzlabot rezultātu pat tādā gadījumā, ja ir maz un sliktas kvalitātes ievades un novērojumu dati. Šī metode arī sniedz iespēju sasniegt augstu precizitāti, izmantojot tikai 102 GNSS/nivelēšanas punktus, gravimetriskajam ģeoīdam savukārt nepieciešams veikt tūkstošiem gravimetrisko mērījumu. Salīdzinājumā ar metodēm, kurās izmanto Stoksa formulu, DFHBF programmatūrā ietverta novērojumu svarošana un statistiskie testi, kas nav iespējami Stoksa formulā, kur visi gravitācijas mērījumi un interpolācijas tiek pieņemtas ar vienādu precizitāti. Rezultātu salīdzinājums ar globālajiem Zemes gravitācijas lauka modeļiem un kvalitātes novērtējums ar atbalsta punktiem parāda, ka EGM2008 un EGG97 modeļiem ir vislabākā sakritība gan ar LV'98, gan ar DFHBF risinājumu. Savukārt ar GO\_CONS\_GFC\_2\_DIR\_R3 modeli šī sakritība ir vissliktākā, jo šis modelis, atšķirībā no citiem, ietver tikai satelītu gravitācijas mērījumu datus. Satelīti (GRACE, GOCE u.c.) pārlido Zemes virsmu lielā augstumā, tāpēc satelītu gravitācijas mērījumos parādās tikai garo un vidējo viļņa garumu gravitācijas lauka iezīmes, kuras neatspoguļo lokāla rakstura gravitācijas anomālijas.

## 4. ASTROĢEODĒZISKĀS METODES

Ģeodēzijas uzdevums ir noteikt Zemes formu un tās ārējā gravitācijas lauka parametrus, kā arī nodrošināt Zemes elipsoīda parametrus. Ģeodēzijas uzdevumu risināšanai pastāv vairākas metožu kopas, kuras raksturo mērījumu un novērojumu iegūšanas veids. Astroģeodēziskās metodes izmanto astronomiskos mērījumus, un gravimetriskās metodes izmanto gravitācijas mērījumus, abas šīs metodes saistās ar Zemes ģeodēziskajiem mērījumiem. Astroģeodēziskie novērojumi ietver astronomiskā garuma un platuma, astronomisko azimutu, kā arī horizontālo leņķu, attālumu, zenīta leņķu, un nivelēto augstumu starpības. Gravitācijas intensitātes vērtības ir nepieciešams zināt, lai veiktu redukcijas ģeoīda un kvaziģeoīda, kā arī ortometrisko un normālo augstumu aprēķinos. Satelītu ģeodēzijas metodes pamatojas uz satelītu novērojumiem. Visu metožu kombinēšana ir svarīgs ģeodēzijas teorijas uzdevums. Ģeoīda virsmas ondulācijas iespējams noteikt, kombinējot trigonometriskos augstumu mērījumus un ģeometrisko nivelēšanu, vai arī integrējot vertikāles novirzes jeb veicot astronomisko nivelēšanu [24].

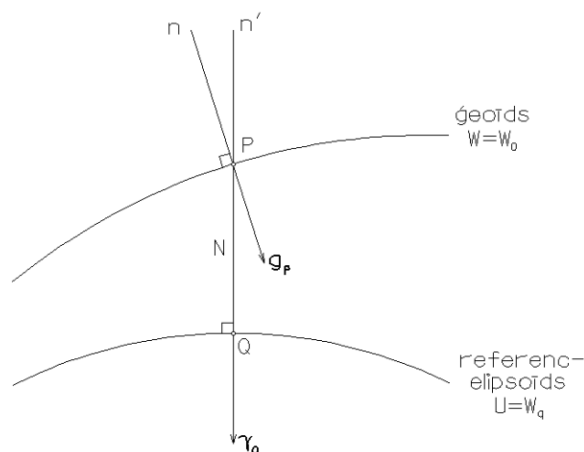
### 4.1. Gravitācijas lauka anomālijas, ģeoīda ondulācijas un vertikāles novirzes

Atšķirība starp aktuālo gravitācijas potenciālu  $W$  un normālo gravitācijas potenciālu  $U$  tiek apzīmēta ar  $T$ , tā ka

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z), \quad (4.1)$$

$T$  tiek saukts par anomālo potenciālu jeb traucējošo potenciālu [43].

Tiek salīdzināts ģeoīds  $W(x, y, z) = W_0$  ar referencilipsoīdu  $U(x, y, z) = W_0$  vienam tam pašam potenciālam  $U_0 = W_0$ . Ģeoīda punkts  $P$  tiek projicēts uz elipsoīda punktu  $Q$  attiecībā pret elipsoīda normāli (4.1.att.). Attālums  $PQ$  starp ģeoīdu un elipsoīdu tiek saukts par ģeoīda augstumu vai ģeoīda ondulāciju un tiek apzīmēts ar  $N$ .



4.1.att. Ģeoīds un referencilipsoīds

Tagad tiek aplūkots gravitācijas vektors  $g$  punktā  $P$  un normālais gravitācijas vektors  $\gamma$  punktā  $Q$ . Gravitācijas anomālijas vektors  $\Delta g$  tiek definēts kā to starpība:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q. \quad (4.2)$$

Vektoru raksturo tā lielums un virziens. Vektoru lielumu atšķirība ir gravitācijas anomālija

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q, \quad (4.3)$$

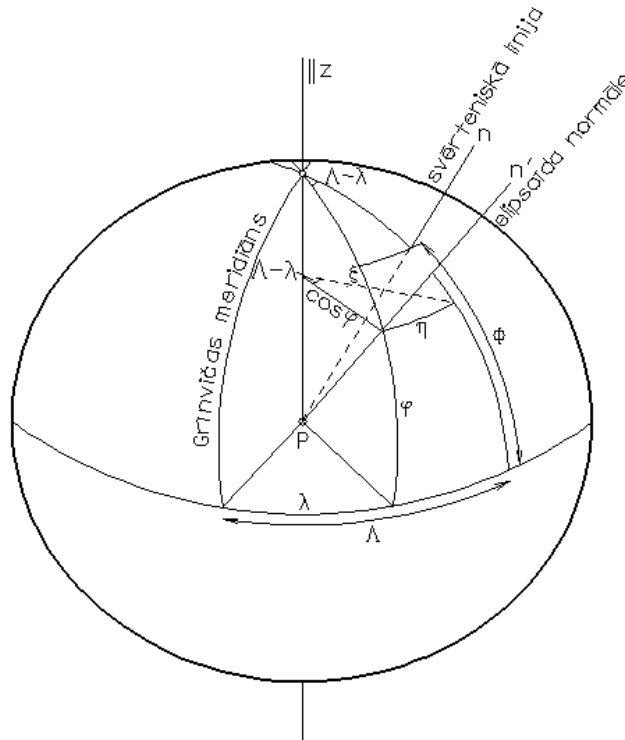
bet atšķirība virzienā ir vertikāles novirze.

Vertikāles novirzei ir divas komponentes: ziemeļu-dienvidu komponente  $\xi$  un austrumu-rietumu komponente  $\eta$  (4.2.att). Tā kā vertikāles virziens tiek tieši noteikts pēc ģeogrāfiskajām koordinātām - garuma un platuma, tad no tām var vienkārši izteikt  $\xi$  un  $\eta$  komponentes. Aktuālās ģeogrāfiskās koordinātas ģeoīda punktā  $P$ , kas definē svērtēniskās līnijas virzienu  $n$  vai gravitācijas vektora virzienu  $g$ , var tikt noteiktas ar astronomiskiem mērījumiem. Tādēļ tās tiek sauktas par astronomiskajām koordinātām un tiek apzīmētas ar  $\Phi$  un  $\Lambda$ . Elipsoidālās ģeogrāfiskās koordinātas, dotas no elipsoīda normāles  $n'$  virziena, tiek apzīmētas ar  $\varphi$  un  $\lambda$ . Ir skaidrs, ka  $\lambda$  ir identiska ar ģeocentrisko garumu. Tādā veidā

ģeoīda normāle ir  $n$ , astronomiskās koordinātas ir  $\Phi, \Lambda$ ;  
 elipsoīda normāle ir  $n'$ , „ģeodēziskās” koordinātas ir  $\varphi, \lambda$ .

No 4.2. attēla nolasa:

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi - \varphi, \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \varphi.\end{aligned}\tag{4.4}$$



4.2.att. Vertikāles novirzes

## 4.2. Helmerta vertikāles noviržu noteikšanas pamatprincipi

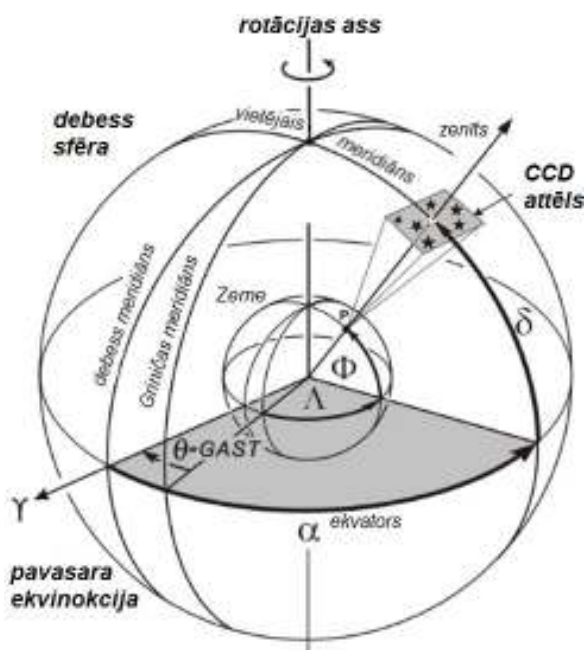
Astronomiskās koordinātas  $\Phi$  un  $\Lambda$  apraksta pozīciju uz Zemes virsmas un ekvatoriālās koordinātas  $\delta$  un  $\alpha$  definē zvaigžņu pozīciju debess sfērā (4.3.att). Abas koordinātu sistēmas ir saistītas ar GAST (leņķis  $\Theta$ ), ņemot vērā Zemes rotāciju [32]. Ģeodēziskā astronomija izmanto astronomisko un ekvatoriālo koordinātu sakarību:

$$\begin{aligned}\Phi &= \delta & \Lambda &= \alpha - \Theta.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Tātad zvaigzne ( $\delta$ ,  $\alpha$ ), kas atrodas zenītā, laikā  $\Theta$ , tieši dod iespēju noteikt nezināmās astronomiskās koordinātas. Parasti tieši zenīta punktā neatrodas neviena zvaigzne, tāpēc zenīta virzienu nepieciešams interpolēt zenīta zvaigžņu laukā, kuru attēlo CCD.

Vertikāles novirzes ( $\xi$ ,  $\eta$ ) tiek tieši noteiktas, aprēķinot starpību starp svērtienisko līniju un zenītkameras kameras ģeodēziskajām koordinātām ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ), noteiktām ar GNSS. Lineārā aproksimācijā komponentes parasti aprēķina ar (4.4) [38]. Literatūrā vertikāles

novirzes pazīstamas arī kā virsmas vertikāles novirzes vai Helmerta vertikāles novirzes. Jāpiebilst, ka otrās kārtas vertikāles novirzes locekļi [51], kas nav ņemti vērā izteiksmē (4.4), jāņem vērā kalnainos reģionos. Vertikāles novirzes iespējams interpretēt gan sfēriskā, gan elipsoidālā, gan planārā aproksimācijā [64]. Kā vertikāles noviržu noteikšanas galvenais instruments promocijas darbā ir apskatīts zenītteleskops, tomēr tās iespējams noteikt arī ar citām metodēm, piemēram, satelītu altimetriju [104].



4.3.att. Helmerta vertikāles noviržu noteikšanas pamatprincips [32]

### 4.3. Vertikāles noviržu aprēķins, lietojot Meinesza formulu

Stoksa formula no gravitācijas anomālijām ļauj aprēķināt ģeoīda ondulācijas [28]. Līdzīgu formulu vertikāles noviržu aprēķiniem no gravitācijas anomālijām ir devis Veinings Meineszs (1928). 4.4. attēls parāda ģeoīda un referencilipsoīda krustpunktu ar patvaļīga azimuta vertikālo plakni. Ja  $\varepsilon$  ir vertikāles novirzes komponente šajā plaknē, tad

$$dN = -\varepsilon ds, \quad (4.6)$$

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds}. \quad (4.7)$$



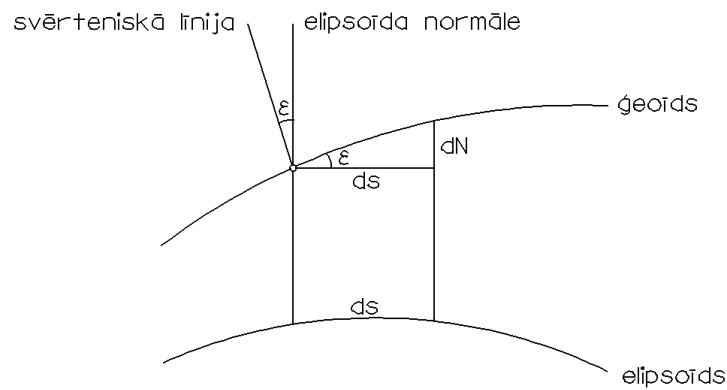
Ziemeļu-dienvidu virzienā

$$\varepsilon = \xi \text{ un } ds = ds_\varphi = R d\varphi; \quad (4.8)$$

un austrumu-rietumu virzienā

$$\varepsilon = \eta \text{ un } ds = ds_\lambda = R \cos\varphi d\lambda, \quad (4.9)$$

kur  $R$  ir vidējais Zemes rādiuss ( $R = 6371 \text{ km}$ ).



4.4.att. Sakarība starp ģeoida ondulācijām un vertikāles novirzi

$ds_\varphi$  un  $ds_\lambda$  formulās tiek lietota sfēriskā aproksimācija; saskaņā ar formulu

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\lambda^2, \quad (4.10)$$

kur  $ds$  ir elipsoīda loka elements,  $\theta$  ir polārā distance un  $r$  ir rādiusvektors; lineārs elements uz sfēras  $r = R$  tiek dots:

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \cos^2\varphi d\lambda^2. \quad (4.11)$$

Izmantojot formulu (4.7), atrod

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{dN}{ds_\varphi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi}, \\ \eta &= -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda},\end{aligned}\quad (4.12)$$

kas dod sakarību starp ģeoīda ondulācijām  $N$  un vertikāles novirzes komponentēm  $\xi$  un  $\eta$ .

Ja  $N$  tiek dots pēc Stoksa formulas, tad iegūst

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS}{d\psi} \cos \alpha \, d\sigma, \\ \eta &= \frac{1}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g \frac{dS}{d\psi} \sin \alpha \, d\sigma.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Šīs ir Veininga Meinesza formulas, kur  $G$  ir vidējā Zemes gravitācijas vērtība ( $G = 979.8 \text{ gali}$ ),  $\psi$  un  $\alpha$  ir sfēriskās polārās koordinātas. Simbols  $\iint_{\sigma}$  ir apzīmējums integrālim pa visu vienības sfēru,  $d\sigma$  ir telpiskā leņķa elements un  $S$  ir Stoksa funkcija [43].

#### 4.4. Astroģeodēziska ģeoīda noteikšana

Ģeoīda formu var noteikt, ja ir dotas vertikāles novirzes. Pamatā Helmerta formula izskatās šādi:

$$dN = -\varepsilon \, ds. \quad (4.14)$$

Integrējot iegūst

$$N_B = N_A - \int_A^B \varepsilon \, ds, \quad (4.15)$$

kur

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (4.16)$$

ir vertikāles novirzes komponente profilam  $AB$ , kura azimuts ir  $\alpha$ .

Šī formula izsaka ģeoīda ondulācijas kā vertikāles novirzes integrāli visā profila garumā. Tā kā  $N$  ir punkta pozīcijas funkcija, tad šis integrālis nav atkarīgs no līnijas formas, kas savieno punktus  $A$  un  $B$ . Praksē tomēr bieži tiek lietoti ziemeļu-dienvidu ( $\epsilon = \xi$ ) vai austrumu-rietumu ( $\epsilon = \eta$ ) virzienā orientēti profili. Integrālis (4.15) tiek noteikts ar skaitlisku vai grafisku integrēšanu. Novirzes komponentei  $\epsilon$  jābūt dotai pietiekoši daudzās profila stacijās, lai starp šīm stacijām varētu veikt ticamu interpolāciju. Dažreiz  $\xi$  un  $\eta$  karte jau ir pieejama interesējošam reģionam, tad var atbilstoši izvēlēties integrācijas profilus.

Ja vertikāles novirzes  $\xi$  un  $\eta$  tiek tieši noteiktas no vienādojumiem

$$\xi = \Phi - \varphi, \quad \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi, \quad (4.17)$$

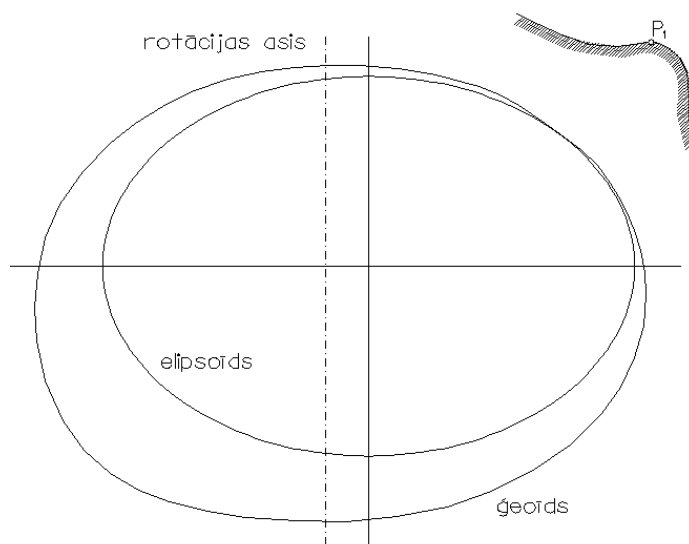
tas ir, salīdzinot astronomiskās un ģeodēziskās koordinātas vienam un tam pašam punktam, tad šo metodi sauc par astroģeodēzisko ģeoīda noteikšanu. Astronomiskās koordinātas tiek tieši novērotas; ģeodēziskās koordinātas tiek iegūtas, izmantojot GNSS tehnoloģijas [43].

#### 4.5. Lokālā astroģeodēziskā sākuma noteikšana

Šī sadaļa tiek apskatīta galvenokārt vēsturiskā kontekstā, lai labāk izprastu klasisko triangulācijas sistēmu. Tiek izvēlēts noteikts „sākuma punkts”  $P_1$ , kuram ondulācija  $N_1$  un vertikāles novirzes komponentes  $\xi_1$  un  $\eta_1$  ir noteiktas. Šeit  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  un  $N_1$  var tikt pieņemtas patvaļīgi; tādā veidā referencilipsoīda pozīcija attiecība pret zemi tiek fiksēta. Lai būtu lielāka noteiktība, aplūko gadījumu, kam ir vislielākā praktiskā nozīme, tas ir gadījums, kurā  $\xi_1 = \eta_1 = N_1 = 0$ . Tāpēc, ka  $\xi_1 = \eta_1 = 0$ , ģeoīdam un elipsoīdam ir viena un tā pati virsmas normāle, tā kā  $N_1 = 0$ , tad elipsoīds ir tangente ģeoīdam punktā  $P_1$  (4.5.att). Nosacījums, ka referencilipsoīda asis ir paralēlas Zemes rotācijas asij, nosaka triangulācijas tīkla orientāciju, jo Laplasa vienādojums dod  $\Delta\alpha_1 = \eta_1$ ,  $\tan \phi_1 = 0$ ; tas ir, ģeodēziskā azimuta sākuma punkts sakrīt ar astronomisko azimutu.

Izmērītos leņķus un distances var reducēt uz elipsoīdu un aprēķināt triangulācijas tīkla punktu pozīcijas (to ģeodēziskās  $\varphi$  un  $\lambda$  koordinātas). Pēc koordinātu  $\Phi$  un  $\Lambda$  noteikšanas tajos pašos punktos, var aprēķināt vertikāles novirzes  $\xi$  un  $\eta$ , izmantojot (4.17). Sākot no pieņemtās vērtības  $N_1$  sākuma punktā  $P_1$  (šajā gadījumā  $N_1 = 0$ ), var aprēķināt

ġeoīda augstumu  $N$  jebkurā punktā, atkārtoti lietojot (4.15). Šie ġeoīda augstumi atbilst elipsoīdam, kas tika fiksēts, nosakot  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  un  $N_1$ , un, protams, elipsoīda lielā pusass  $a$  un saplakums  $f$ . Tas tiek definēts kā astroģeodēziskais sākums  $(a, f; \xi_1, \eta_1, N_1)$  [43].



4.5.att. Referencilipsoīda tangente pret ġeoīdu punktā  $P_1$

Izejot no  $N$  un ortometriskā augstuma  $H$ , augstums  $h$  virs elipsoīda tiek izteikts kā  $h = H + N$ , tā, lai taisnleņķa telpiskās koordinātas  $X, Y, Z$  varētu aprēķināt ar

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= \left( \frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Bet lai arī  $\xi$  un  $\eta$  ir absolūtas (ģeocentriskas) novirzes, koordinātu sistēmas sākumpunkts nebūs Zemes centrs. Aprakstītā procedūra acīmredzami parāda, ka  $N, \xi, \eta$  ir nepieciešami, lai reducētu izmērītos leņķus un attālumus uz elipsoīda. Šim mērķim arī aptuvenas  $N, \xi, \eta$  vērtības ir pietiekamas. Šīs vērtības tiek iegūtas ar nupat aprakstīto procesu ar nereducētajiem leņķiem un attālumiem.

Formula (4.15) ġeoīda ondulācijas  $N$  nosaka no  $\xi$  un  $\eta$ , tas ir, pēc gravitācijas vektora  $g$  virziena. Integrēšana notiek tikai ierobežotā profilā, tātad ir pietiekami noteikt vertikāles novirzes tikai ierobežotā apgabalā. Referencilipsoīda pozīcija attiecībā pret Zemes gravitācijas centru nav zināma un var tikt noteikta tikai ar gravimetriskām metodēm vai

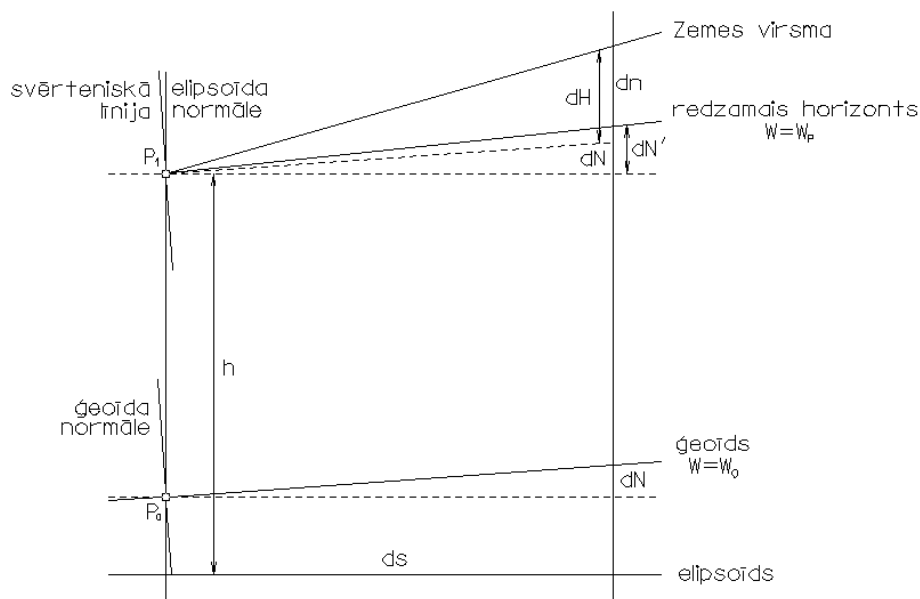
satelītu orbītu analīzi. Astroģeodēzisko metodi var izmantot tikai uz sauszemes, jo nepieciešamie mērījumi uz jūras/okeāna ir neiespējami.

Astroģeodēziskā metode tiek bieži izmantota ģeoīda noteikšanā. Tomēr laikā pēc 1970. gada oriģinālā Helmerta integrācijas formula tiek izmantota reti, un vertikāles novirzes tiek arvien biežāk kombinētas ar citiem datiem (gravitācijas, GNSS un citu satelītu datiem).

#### 4.6. Svērtēniskās līnijas izlieces korekcija

Tā kā astronomiskās koordinātas  $\Phi$  un  $\Lambda$  tiek novērotas uz Zemes virsmas, tās nav precīzi vienādas ar to attiecīgajām vērtībām uz ģeoīda virsmas, jo svērtēniskā līnija nav taisne, tāpēc ka Zemes virsma un ģeoīda virsma nav paralēlas.

Formulā (4.15) novirzes komponentes  $\xi$  un  $\eta$  attiecas uz ģeoīdu. Tas nozīmē, ka  $\Phi$  un  $\Lambda$  astronomiskie novērojumi jāreducē uz ģeoīdu. Ir iespējams izmantot šo svērtēniskās līnijas izlieces korekciju ne tikai astronomiskajām koordinātām  $\Phi$  un  $\Lambda$ , bet arī ģeoīda augstumu starpībām, aprēķinātām no nereducētām novirzes komponentēm.



4.6.att. Astronomiskās nivelēšanas redukcija

Šīs  $N$  vērtības, apzīmētas ar  $N'$ , tiek iegūtas, izmantojot (4.17) formulā tieši novērotas  $\Phi$  un  $\Lambda$  vērtības, kuras definē svērtēniskās līnijas virzienu stacijā  $P$  (4.6.att). Apzīmējums  $N$  tiks rezervēts labotajiem ģeoīda augstumiem. No 4.6. attēla nolasa:

$$dh = dN + dH = dN' + dn, \quad (4.19)$$

kur  $h$  ir ģeometriskais augstums virs elipsoīda. Tādā veidā var redzēt, ka starpība starp nereducēto un laboto ģeoīda augstuma elementu,

$$dN' - dN = dH - dn = d(OC), \quad (4.20)$$

ir vienāda ar starpību starp ortometriskā augstuma elementu  $dH$  un augstuma pieaugumu  $dn$ , kas ir ortometriskā redukcija  $d(OC)$ .

Tādējādi

$$N_B - N_A = N'_B - N'_A - OC_{AB}, \quad (4.21)$$

lai varētu izmantot ortometriskās korekcijas vienādojumu:

$$N_B - N_A = - \int_A^B \varepsilon ds - \int_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} dn + \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B - \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A, \quad (4.22)$$

kur  $\gamma_0$  ir patvaļīgi izvēlēta konstanta vērtība; novirzes komponentes  $\varepsilon$  tiek aprēķinātas no novērotajām  $\Phi$  un  $\Lambda$  vērtībām, izmantojot formulas (4.6) un (4.7) [43].

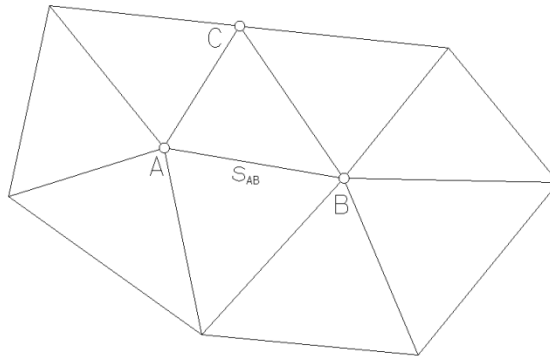
#### 4.7. Astroģeodēziskā ģeoīda augstumu tīkli

Pietiekami sabiezinātam astroģeodēzisko staciju tīklam ar vidējo attālumu starp stacijām 10-20 km [106], integrāli (4.22) var aproksimēt šādi:

$$\Delta N_{AB} = N_B - N_A = - \int_A^B \varepsilon ds = - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} \int_A^B ds \quad (4.23)$$

vai

$$\Delta N_{AB} = - \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} S_{AB}. \quad (4.24)$$



4.7.att. Astroģeodēziskā ģeoīda triangulācijas tīkls

Tādā veidā līnijai  $AB$  var noteikt ģeoīda augstuma izmaiņas, kā arī līdzīgā veidā pārējām līnijām  $BC$  un  $CA$  trīsstūrī  $ABC$  (4.7.att.). Nosacījumam

$$\Delta N_{AB} + \Delta N_{BC} + \Delta N_{CA} = 0 \quad (4.25)$$

ir jābūt izpildītam un izmantotam kā nosacījumam mazāko kvadrātu metodē. Atbilstoši arī pārējie trīsstūri var tikt aprēķināti kā jebkurā citā augstumu tīklā [43].

#### 4.8. Vertikāles nolieces interpolācija

Formulā (4.23) pieņemts, ka stacijas, kurās vertikāles novirzes ir zināmas, ir ļoti tuvu viena pie otras. Tādējādi  $\varepsilon$  profilu var konstruēt interpolējot. Ja,  $A$  un  $B$ , formulā (4.23) pieņem divas blakus esošas astroģeodēziskās stacijas un ja tās ir pietiekoši tuvas, lai ģeoīda profilu starp tām varētu tuvināt lokam, tad šī formula kļūst

$$N_B - N_A = -\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2}s, \quad (4.26)$$

kur  $s$  ir attālums starp  $A$  un  $B$ . Šādā veidā var izvairīties no interpolācijas, jo pieņēmums, ka ģeoīds starp  $A$  un  $B$  veido loku, pats par sevi ir interpolācija [43]. Mērena reljefa apgabalos, piemēram, 25 km attālums starp stacijām un aproksimācija (2.13) dod apmierinošus rezultātus, bet kalnu rajonos 10 km vai pat mazāks attālums var nebūt pietiekošs. Bet 500 m vidējais attālums starp astroģeodēziskajām stacijām dod iespēju noteikt ģeoīda modeli ar precizitāti līdz dažiem milimetriem [67]. Arī gravimetriskie dati var tikt izmantoti, lai interpolētu vertikāles novirzes starp astroģeodēziskajām stacijām [82].

#### 4.9. Astronomiskā nivelēšana

Astronomiskā nivelēšana nodrošina ģeoīda augstuma starpības pa profilu uz Zemes fiziskās virsmas vai uz ģeoīda, integrējot vertikāles novirzes [66]. Ģeoīda augstumu starpība starp diviem punktiem  $A$  un  $B$  tiek dota pēc formulas

$$\Delta N_{AB} = N_B - N_A = - \int_A^B \varepsilon ds \quad (4.27)$$

Vertikāles novirzes komponentes iegūst, reducējot novēroto astronomisko platumu  $\Phi$  un garumu  $\Lambda$  uz ģeoīdu

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi + \delta\Phi \\ \Lambda_0 &= \Lambda + \delta\Lambda, \end{aligned} \quad (4.28)$$

kur  $\Phi_0$  un  $\Lambda_0$  ir astronomiskās koordinātas, kas reducētas uz ģeoīdu. Šī redukcija attiecas uz svērtēniskās līnijas izlieci. Praksē to aprēķina, izmantojot aptuvenu formulu, piemēram, [43]

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= -0.17'' H_{\text{km}} \sin 2\Phi \\ \delta\Lambda &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$\delta\Phi$  korekcija parasti ir ļoti neliela.

Vertikāles novirzes komponentes  $\xi$  un  $\eta$  reducētas uz ģeoīdu

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi + \delta\Phi \\ \eta_0 &= \eta + \delta\Lambda. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Precīzā astronomiskā nivelēšana pamatā pieprasa blīvu vertikāles noviržu kopu profilā, lai gravitācijas lauka forma tiktu pienācīgi attēlota un vertikāles novirzes datus varētu ticami interpolēt. Lineāri interpolētas vertikāles novirzes starp tālu esošām astroģeodēziskajām stacijām pietiekami neatbaido reālo gravitācijas lauku, it īpaši kalnainos reģionos [39].



Astrogravimetriskā nivelēšana izmanto gravimetrijas mērījumus vertikāles noviržu interpolēšanā. Astronomiski-topogrāfiskā nivelēšana izmanto vertikāles noviržu topogrāfisko reducēšanu astroģeodēziskajās stacijās. Tas nozīmē, ka kalnainos reģionos lielu daļu vertikāles noviržu signālu izraisa topogrāfisko veidojumu masa, ko nepieciešams novērst [39].

Pamatojoties uz iepriekš veiktajiem pētījumiem [26] par nepieciešamo vertikāles noviržu mērījumu blīvumu 1-2 cm precizitātes ģeoīda noteikšanai, var aptuveni noteikt Latvijas teritorijā nepieciešamo vertikāles noviržu mērījumu skaitu. Lai sasniegtu minēto precizitāti ģeoīda projektam 1000 km<sup>2</sup> platībā, ir nepieciešami aptuveni 1000 gravimetrisko punktu, bet tikai 30 astroģeodēzisko punktu. Lai realizētu Latvijas gravimetriskā ģeoīda projektu ar 1-2 cm precizitāti, ir nepieciešams veikt vismaz 64 500 gravimetrisko punktu mērījumus Latvijas teritorijā (Latvijas teritorijas platība ir 64 589 km<sup>2</sup>), turklāt ir nepieciešami arī gravimetriskie dati no kaimiņvalstīm. Savukārt, lai izveidotu Latvijas astroģeodēzisko ģeoīdu, būtu nepieciešami aptuveni 2000 astroģeodēzisko punktu mērījumi. Tomēr arī astroģeodēziskās metodes mērījumu iegūšanas procesam piemīt zināmi trūkumi: mērījumi iespējami tikai naktīs un debess zenīta rajonam jābūt brīvam no mākoņiem un miglas. Latvijas klimata apstākļos tas būs ierobežojošs faktors, lai 1-2 cm precizitātes sasniegšanai nepieciešamos mērījumu veiktu ātri un efektīvi. Šajā gadījumā optimāls risinājums būtu izmantot esošos pieejamos gravimetrisko mērījumu datus un nivelēšanas datus un kombinēt ar astroģeodēzisko mērījumu datiem.

## 5. DIGITĀLO ZENĪTTELESKOPU UZBŪVES PAMATPRINCIPI

Galvenie šo novērojumu metožu uzlabojumi notika 20. gadsimta 70-tajos gados, kad parādījās pirmās pārvietojamās fotogrāfiskās zenītkameras (piemēram, TZK-1, -2, -3), kas tika projektētas un konstruētas Vācijā [112], Itālijā [6] un Austrijā [109]. Šiem instrumentiem jau bija nodrošināta automatizēta ekspozīcijas laika reģistrācija un līmeņrāža nolasījumi, kas lielā mērā novērsa cilvēcisko faktoru ietekmi uz rezultātiem. Salīdzinot ar klasiskajām vizuālās novērošanas metodēm, zenītkameras ļāva ievērojami paātrināt un vienkāršot novērojumu procedūru. Lai iegūtu decimetru precizitātes ģeoīdu, par optimālu novērojumu attālumu tika noteikti 20km [30]. Šādi automatizēti instrumenti tika izmantoti Eiropas un Amerikas valstīs (Šveicē, Austrijā, Vācijā, Dānijā, Itālijā, Spānijā, Portugālē, Grieķijā, Francijā, Norvēģijā, Kanādā, Brazīlijā, Venecuēlā) lokālo un reģionālo ģeoīdu noteikšanai līdz pat 20. gadsimta 90-tajiem gadiem [36].

Galvenais šīs fotogrāfiskās tehnikas trūkums bija zvaigžņu koordinātu noteikšana, kas tika veikta manuāli. Vienā novērojumu seansā iegūto datu apstrāde varēja ilgt 3-5 stundas, radot nepieciešamību pēc kvalificēta darbspēka un tādējādi uzturot augstas astroģeodēzisko novērojumu izmaksas. Un tā kā sāka strauji palielināties gravitācijas novērojumu skaits un parādījās satelītu dati, 90-tajos gados astroģeodēzisko metožu nozīmība strauji samazinājās.

Pēdējā desmitgadē astronomiskajā ģeodēzijā ir parādījušās jaunas tendences. Parādās fundamentāli uzlabojumi astroģeodēzisko novērojumu instrumentos, tie kļūst efektīvāki, automatizētāki, precīzāki un spējīgi darboties reālajā laikā. Kā iemesls tam ir lādiņsaites matricu (CCD) izstrāde un to straujā attīstība, vienlaicīgi samazinoties cenām, nodrošina to pieejamību zinātniskajās institūcijās. Šī daudzsološā attīstība noved pie astroģeodēzisko metožu „atdzimšanas”. Kopā ar gravimetriju astroģeodēziskā vertikāles noviržu noteikšana dod lielu ieguldījumu vietējo ģeoīdu raksturlielumu neoteikšanā [18] [20]. Tāpat vertikāles noviržu mērījumu dati tiek lietoti globālo Zemes gravitācijas lauka modeļu izveidē, it sevišķi svarīgi tie ir kalnu un piekrastes reģionos [35]. Astroģeodēziskos mērījumus iespējams izmantot reģionālo gravimetrisko ģeoīda modeļu un globālo gravitācijas lauka modeļu precizitātes pārbaudē [42] [99].

## 5.1. Digitālo zenītteleskopu attīstība Eiropā pēdējās desmitgadēs

Šeit var minēt vairākas digitālo zenītteleskopu izstrādes, kas pēdējos gados veiktas Eiropas universitātēs, institūtos un laboratorijās. Šo izstrāžu salīdzinājums uzskatāmi parādīts 5.1. tabulā.

Kā pazīstamākās un publikācijās biežāk pieminētās ir divas, nedaudz atšķirīgas, zenītkameras sistēmas, kas tika izveidotas Ģeodēzijas institūtā, Hannoveres Universitātē un ETH Zurich. Divas esošās fotogrāfiskās zenītkameras, TZK2 un TZK3, tika pārveidotas un papildinātas ar CCD attēlu sensoriem, GNSS un augstas precizitātes līmeņrāžiem. Pirmā no tām ir TZK2-D, kuras izveidi uzsāka Prof. Günter Seeber, savukārt digitālā zenītkameras sistēma, kuru īstenoja ETH Zurich, sauc par Digitālo Astronomisko Noviržu Mērišanas Sistēmu (*Digital Astronomical Deflection Measuring System – DIADEM*) [32] [33] [37] [38] [41].

Abām sistēmām ir motorizēta superstruktūra, kas sastāv no optikas, CCD un līmeņrāžiem un to azimutā var rotēt par 180°, ļaujot veikt novērojumus divos pretējos virzienos. Precīzais lodīšu gultnis atdala superstruktūru no substruktūras, kas ir motorizēts trijkājis. Trīs elektromehāniskie aktuātori, kas savienoti ar stabilu pamatni, ļauj veikt automatizētu instrumenta līmetņošanu. Lauka dators tiek izmantots iekārtas un datu plūsmas kontrolei, datu uzglabāšanai un tiešsaistes datu apstrādei.

*Zeiss Mirotar* katadioptriskais objektīvs ir ar 200 mm apertūru, fokusa garumu 1020 mm un kompaktu uzbūvi (kopējais garums – 400 mm). CCD attēlu sensora matricas izmērs ir 1.5 miljoni pikseļu TZK-2 un 6 miljoni pikseļu DIADEM sistēmai. Pikseļu izmērs ir identisks abām kamerām (9x9 μm). Redzeslauks (*Field of view - FOV*) ir apmēram 0.42 deg<sup>2</sup> TZK-2 un 1.68 deg<sup>2</sup> DIADEM sistēmai.

Zvaigžņu attēli līdz 13-14 magnitūdai tiek iegūti īsu, 0.2-0.5 sekunžu ekspozīciju laikā. Lai ekspozīciju piesaistītu precīzajam laikam, mehāniskā slēdža kontroles ierīce ir savienota ar GNSS uztvērēju un tiek sinhronizēta ar GNSS laika skalu. GNSS izmanto arī, lai noteiktu kameras ģeodēziskās koordinātes.

Līmeņrāža mērījumi tiek veikti, lai attiecinātu digitālās zenītkameras optisko asi pret svērteņa līniju. Tiek izmantoti divi HRTM (*High Resolution Tiltmeter, Lippmann Company for Geophysical Instruments*) līmeņrāži, tie ir savstarpēji ortogonāli orientēti un instalēti uz zenītkameras. Novērojumu laikā līmeņrāži nosaka mazas, nenovēršamas novirzes starp svērteņa līniju un kameras optisko asi.

Visas kameras komponentes ir izvietotas uz nelieliem ratiņiem, tās uz lauka stacijām var transportēt furgonā. Pārsvarā vienā novērojumā ar TZK2-D tiek iegūti 20-50 zvaigžņu attēli un ar DIADEM tiek iegūti 80-200 zvaigžņu attēli. Vienā lauka stacijā tiek veikti 40-50 atsevišķi novērojumi. Kopumā tie aizņem aptuveni 20 minūtes.

Digitālās zenītkameras zvaigžņu attēlu apstrādei tiek izmantoti Tycho-2 un UCAC zvaigžņu katalogi. Vertikāles noviržu mērījumu apstrāde ilgst dažas sekundes un tai izmanto AURIGA programmatūru, kas ir izstrādāta Hannoveres Universitātē.

Pamatojoties uz daudziem eksperimentiem, šo digitālo zenītkameru precizitāte tika novērtēta 0.08-0.10". Tas attiecas uz 40-50 atsevišķiem novērojumiem ~20 minūšu laikā un kopumā 2000-5000 apstrādātiem zvaigžņu attēliem. ~60 minūšu ilgi novērojumi dod precizitāti 0.05" [37].

Sistēma automātiskai vertikāles nobīžu noteikšanai ir izveidota arī Polijā AGH Zinātņu un Tehnoloģiju universitātē, Kalnrūpniecības mērniecības un Vides inženierzinātņu fakultātē. Sistēmas konstrukcija balstās uz pārvietojamu fotogrāfisko zenītteleskopu, kas ir aprīkots ar CCD kameru [62]. Optiskā sistēma ir Maksutov-Cassegrain tipa teleskops MTO-11CA ar 1000 mm fokusa garumu un 100 mm apertūru [63]. Sistēmas pamatā ir mehāniska konstrukcija, kas ļauj pagriezt kameru kopā ar optiku ap tās optisko asi. Lai noteiktu instrumenta rotācijas ass inklināciju, tiek lietots viens elektroniskais Wyler Zerotronic 0.5 līmeņrādis ar precizitāti 0.1" [63]. Tā kā līmeņrādis ir tikai viens, tad ir nepieciešami vēl papildus divi novērojumi perpendikulārajā plaknē. Tātad, kopā četri novērojumi, četrās pozīcijās.

Tiek izmantots Tycho-2 zvaigžņu katalogs. Lai reģistrētu attēla ekspozīcijas laiku, tiek lietots portatīvais dators, kas ar 1PPS (*pulse per second*) signālu ir sinhronizēts ar GNSS uztvērēju. Datora pulkstenis tiek sinhronizēts ar Tac32 programmatūru, kas nodrošina milisekunžu precizitāti. CCD kamera Starlight Xpress SXVF-M25C ir aprīkota ar elektronisko slēdzi. Tā dod 82' x 54' redzeslauku ar 1.63"/px izšķirtspēju. Pikseļa izmērs ir 7.8 μm x 7.8 μm un CCD sensora izmērs ir 3024 x 2016 pikseļi. CCD kameru kontrolējošā programmatūra balstās uz MaximDL vidi un ļauj atzīmēt ekspozīcijas sākumu un beigas. Zvaigžņu identifikāciju veic ar Pin Point Astrometric Engine Library. Ekspozīcijas laiks ir 1 sekunde, tāpēc zvaigžņu attēli Zemes rotācijas dēļ ir izstiepti. Pirmie testa novērojumi tika veikti 2007. gadā. Tie parādīja, ka ir iespējams iegūt zvaigžņu attēlus līdz 9.5 magnitūdai ar 1 sekundes ekspozīciju. Zvaigžņu skaits attēlā mainās no 2 līdz 15.

Jaunāko Eiropā izstrādāto digitālo zenītteleskopu salīdzinājums

|                        |   |   |                             |  |   |  |
|------------------------|---|---|-----------------------------|--|---|--|
| Nosaukums              | TZK2-D                                  | DIADEM                                  | ZC-G1                       | -  | -   | -  |
| Izveidotājs            | Hannoveres Universitāte                 | ETH Zurich                              | Vīnes tehniskā universitāte | AGH Zinātņu un Tehnoloģiju universitāte (Polija) | Būvniecības fakultātē, Ģeodēzijas un ģeoinformātikas nodaļā (Serbija) | Bosfora universitāte (Turcija) (testētas 2 sistēmas) |
| Fokusa garums          | 1020 mm                                 | 1020 mm                                 | 2000 mm                     | 1000 mm  | 500 mm  | 3556 mm<br>4064 mm                                   |
| Apertūra               | 200 mm                                  | 200 mm                                  | 50 mm                       | 100 mm   | 40 mm (lēcas diametrs)  | 14''<br>16''   |
| CCD                    | Kodak KAF 1602E                         | KAF 3603 E                              | Starlite MX 916             | Starlight Xpress SXVF-M25C                       | SBIG ST2000-XMC   | Canon EOS 500D<br>Apogee Alta U47                    |
| Matricas izmērs        | 1530 x 1020 px                          | 3072 x 2048 px                          | 752 x 580 px                | 3024 x 2016 px                                   | 1600 x 1200 px  | 4768 x 3174 px<br>1024 x 1024 px                     |
| Pikseļa izmērs         | 9 μm x 9 μm                             | 9 μm x 9 μm                             | 11 x 12 μm                  | 7.8 μm x 7.8 μm                                  | 7.4 μm x 7.4 μm   | 4.7 μm x 4.7 μm<br>13 μm x 13 μm                     |
| Pikseļa mērogs         | 1.86 loka s/px                          | 1.86 loka s/px                          | -                           | 1.63 loka s/px                                   | -   | -  |
| FOV                    | 47.2' x 31.5' (=0.42 deg <sup>2</sup> ) | 95.2' x 53.5' (=1.68 deg <sup>2</sup> ) | -                           | 82' x 54'  | 20' x 15'   | 21' x 14'<br>11.4' x 11.4'                           |
| Ekspozīcijas laiks     | 0.2–0.5 s                               | 0.2–0.5 s                               | -                           | 1 s  | -   | 0.2-1 s  |
| Zvaigžņu magnitūda     | 13-14                                   | 13-14                                   | -                           | 9.5  | 6   | -  |
| Zvaigžņu skaits attēlā | 20-50                                   | 80-100                                  | 20-40(?)                    | 2-15   | -   | >6   |
| GNSS                   | Z12, Ashtech                            | μ.-blox Antaris, Leica                  | -                           | -  | -   | Divfrekvenču   |
| Līmeņrādis             | HRTM, Lippmann                          | Wyler, Zerotronic/HRTM, Lippmann        | -                           | Wyler Zerotronic 0.5                             | Kalibrēšanas sistēma vertikāles kompensācijai                         | Leica Nivel20  |
| Mērījumu amplitūda     | ±600''                                  | ±1°/±300''                              | -                           | -  | -   | -  |
| Precizitāte (absolūtā) | 0.04–0.05''                             | 0.05–0.10''                             | -                           | -  | -   | -  |

Viena novērojumu sesija ilgst aptuveni 20 minūtes. Astronomiskā platuma noteikšanas atkārtojamība tiek novērtēta aptuveni 2-3" robežās. Astronomiskā garuma noteikšanas atkārtojamība tiek vērtēta kā daudz sliktāka. Laika reģistrācijas procedūra un slēdža latentums ir galvenie kļūdu avoti, tāpēc tos vēl plāno uzlabot [62]. Instrumenta absolūtā precizitāte vēl nav novērtēta.

Mērījumu sistēma astroģeodēziskiem mērījumiem izstrādāta arī Serbijā Būvniecības fakultātē Ģeodēzijas un ģeoinformātikas nodaļā [75]. Tā sastāv no optiska instrumenta (zenītlotes) Zeiss PZL-100 precīzai vietējās vertikālās tangentes noteikšanai, CCD kameras SBIG ST2000-XMC zvaigžņu attēla iegūšanai, GNSS sistēmas laika uzturēšanas nolūkam, portatīvā datora kameras vadībai un portatīvā datora ar draivera programmatūru laika reģistrācijai.

Optikas instrumentam ir kalibrēšanas sistēma vertikāles kompensācijai, vertikāles tangente var tik sasniegta ar 2" precizitāti. Zenītlotes optika ļauj redzēt zvaigznes līdz 6 magnitūdai. CCD kamera ir uzmontēta zenītlotes okulāram. Visu sistēmas komponentu barošanu nodrošina 220V avots. Tiek izmantots GNSS mikro-kontrolieris ar 1PPS iespēju. CCD kameras vadībai tiek izmantota SBIG (*Santa Barbara Instrument Group*) aplikācija. Iegūtos attēlus ieraksta automātiski. Laika uzturēšanas sistēma darbojas DOS vidē. Pirmie rezultāti liecina, ka mērījumiem nepieciešami pieci atkārtojumi, lai iegūtu pieņemamus rezultātus.

Digitālās zenītkameras sistēma izstrādāta Bosfora universitātē, Stambulā, Turcijā [29]. Tai pamatā ir Schmidt-Cassegrain tipa teleskops ar 14 collu apertūru (tika testēts teleskops arī ar 16" apertūru), divi divu-asu Leica Nivel20 inklinometri, divfrekvenču GNSS uztvērējs, DSLR kamera un dators datu uzglabāšanai un sistēmas kontrolei. Zvaigžņu identificēšanai tiek izmantota informācija no UCAC2 zvaigžņu kataloga. Pirmie novērojumi tikai veikti Bosfora universitātes Kandilli observatorijā un Stambulas Tehniskās universitātes Zemestrīču izpētes centrā. Tie pagaidām fokusējās galvenokārt uz pietiekošu zvaigžņu skaitu attēlā iegūšanu. Vēl ir nepieciešama laika piesaiste attēliem, ņemot vērā DSLR kameras slēdža aizturi. Tika testētas Canon 500D DSLR, Pictor 216xt un Apogee Alta U47 CCD matricas. Tās visas tika testētas ar diviem teleskopiem. Katrā novērojumu sesijā tika izmantoti dažādi ekspozīcijas laiki - ekspozīcijas laiks, mazāks par 1 sekundi, deva apaļas formas zvaigžņu attēlus, savukārt, lielāks ekspozīcijas laiks dod izstieptus zvaigžņu attēlus. Minimālais zvaigžņu skaits attēlā ir 6 zvaigznes. Turpmākie pētījumi tiks veikti, izmantojot Schmidt-Cassegrain tipa teleskopu ar 8" apertūru.

Vīnes Tehniskajā universitātē Ģeodēzijas un ģeofizikas institūtā tika izveidota neliela, mobila CCD zenītkamera ZC-G1 [25] [26]. Tai ir Starlite MX 916 sensors (752 x 580 pikseļi, 11 x 12 μm), neliels GNSS navigācijas uztvērējs un 50/200 mm optika. Vadībai tiek izmantots portatīvais dators. Tā ir uzmontēta īpašam dūralumīnija „tornim” un to var pagriezt tieši 4x90°, pat pilnīgā tumsā, jo pagriešanu līdz ±2' kontrolē īpašas atsperes. Zvaigžņu lauka attēli ar 20-40 Tycho

kataloga zvaigznēm dod  $\pm 0.5-1''$  precizitāti. Parasti netiek izmantota pilna  $11 \times 12 \mu\text{m}$  pikseļu izšķirtspēja. Spožāku zvaigžņu attēli palielina precizitāti, ( $\sim 0.03 \text{ px}$ ) pat ja izšķirtspēja ir mazāka. 4 zvaigžņu attēlu iegūšana aizņem 10 minūtes, vēl 4 attēli tiek iegūti, lai kontrolētu rezultātus. Tiks izmantoti digitāli vertikālie sensori. Precizitātei  $< 0.5''$  ir izveidota kamera G-2.

No pieminētajām digitālo zenītkameru sistēmām tikai divām, TZK2-D un DIADEM, ir novērtēta to precizitāte un ir iegūti rezultāti, kas ir arī publicēti.

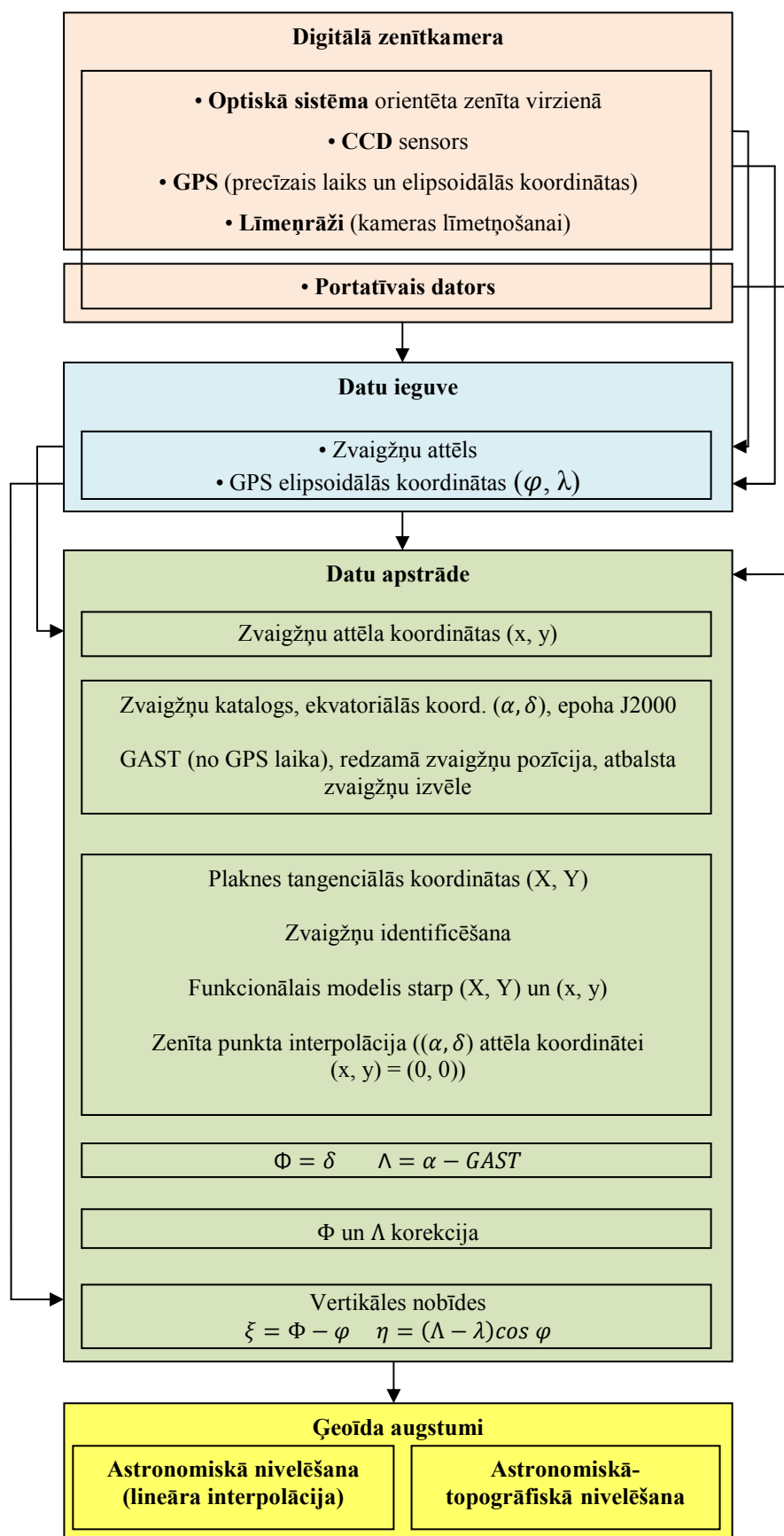
## 5.2. Digitālo zenītteleskopu tehniskie, optikas un elektronikas pamatprincipi

Pārsvārā visiem digitālajiem zenītteleskopiem ir līdzīgs uzbūves pamatprincips. Digitālais zenītteleskops (5.1.att.) sastāv no optiskās sistēmas, kas orientēta zenīta virzienā, CCD sensora zvaigžņu attēlošanai, GNSS uztvērēja elipsoidālo koordināšu noteikšanai un precīzā laika nodrošināšanai, kā arī elektroniskajiem līmeņrāžiem svērtēniskās līnijas noteikšanai. Dators tiek izmantots aparatūras vadībai un datu plūsmas kontrolei, kā arī tūlītējai datu apstrādei.

Svarīgi, lai optiskajā sistēmā lēcas būtu ar zemu distorsiju. Ja optiskās sistēmas garums ir  $\sim 100\text{cm}$ , tad fokālo plakni stipri ietekmē temperatūras izmaiņas ( $0.03 \text{ mm K}^{-1}$ , ja optiskais tubuss izgatavots no metāla). Var izmantot motorizētu fokusēšanu, kas automātiski maina CCD vertikālo pozīciju, pamatojoties uz temperatūras mērījumiem. Tādējādi izvairās no slikti fokusētiem zvaigžņu attēliem, kas var ietekmēt novērojumu precizitāti.

CCD izmantošanas galvenā priekšrocība ir nepārtrauktā attēlu digitālu datu pieejamība, kas pieļauj attēlu datu apstrādi tieši pēc datu iegūšanas. CCD sensoriem ir uzlabota gaismas jūtība, kas ļauj attēlot zvaigznes ar lielāku magnitūdu. CCD sensors ir aprīkots ar elektromehānisko slēdzi, kas kontrolē ekspozīcijas laiku. Ekspozīcijas laika noteikšana notiek, izmantojot GNSS. Lielākam CCD sensoram ir priekšrocība gadījumos, ja zenītā parādās nelieli mākoņi vai dūmaka. Ekspozīcijas laiks ir  $0.2-0.5\text{s}$ , ilgāks laiks nav piemērots, jo tad attēlotās zvaigznes sāk izteikti iezīmēt lokveida trajektoriju [38].

GNSS uztvērējs ir zenītteleskopa sistēmas nozīmīga daļa, to izmanto elipsoidālo koordinātu noteikšanai. GNSS tiek izmantotas arī precīzā laika noteikšanai. Pateicoties GNSS laika signālu augstajai precizitātei, to var izmantot ekspozīciju epohu noteikšanai. GNSS laiks ir piesaistīts UTC (*Universal Time Coordinated*) ar noteiktu korekciju. Ņemot vērā Zemes orientāciju dUT1, ekspozīcijas laiku var konvertēt no UTC uz UT1. Šī laika skala ir saistīta ar GMST (*Greenwich Mean Sidereal Time*) un GAST (*Greenwich Apparent Sidereal Time*), kas ir nepieciešami ģeodēziskajā astronomijā. Elektroniskais signāls katras ekspozīcijas laikā tiek sūtīts uz CCD elektronisko slēdzi, lai nodrošinātu laika integrēšanu šajā procesā. Elektroniskā signāla fronte, kas atzīmē ekspozīcijas sākumu, tiek pārsūtīta no CCD kontroles sistēmas uz GNSS uztvērēju.



5.1.att. Vienkāršota digitālo zenītteleskopu darbības principa shēma



Slēdža pārvietojums tiek reģistrēts GNSS laika skalā. Jāņem vērā arī sistemātiskas slēdža laika nobīdes. Lai no tām izvairītos, tiek lietota slēdža kustības kalibrēšanas funkcija [38]. Jaunākie līmeņrāži ir augstas izšķirtspējas līmeņrāži (HRTM), tiem ir augstāka precizitāte, nav vai arī ir mazas nulles nobīdes un to variācijas un īss nostabilizēšanās laiks. HRTM ir elektronisks svārsta slīpuma sensors, kura sprieguma signāli tiek digitizēti ar 100Hz frekvenci, izmantojot datu ieguves elektronisko plati. Divi perpendikulāri novietoti līmeņrāži tiek izmantoti, lai līmetnotu zenītkameru. Pēc tam tomēr ir iespējamās nelielas nobīdes starp zenītkameras rotācijas asi un svērtēnisko līniju. Tās tiek izmērītas un saglabātas, lai ekspozīcijas laikā precīzētu kameras orientāciju attiecībā pret svērtēnisko līniju. Lai šos mērījumus piesaistītu ekspozīcijas intervāliem, CCD kontroles sistēmas signāli tiek sinhroni reģistrēti. Lai sasniegtu augstas precizitātes līmeņrāžu mērījumus, ir nepieciešama zemfrekvences signālu filtrēšana, precīza nulles nobīžu izslēgšana, piemērotu transformācijas modeļu izmantošana, kā arī precīza mēroga faktora kalibrēšana.

### 5.3. Digitālo zenītteleskopu programmatūras pamatprincipi

Pēc zenītteleskopa līmetņošanas un fokusēšanas tiek atvērts CCD elektromehāniskais slēdzis, lai iegūtu zenīta zvaigžņu attēlu. Vienlaicīgi ar GNSS tiek mērīts laiks. Abu līmeņrāžu un CCD signāli tiek reģistrēti. Pēc tam, kad CCD attēla dati un informācija par GNSS laiku tiek pārraidīti uz datoru, zenītteleskopu rotē un datu ieguves procedūra tiek atkārtota. Vairāki attēli, iegūti no vairākām kameras pozīcijām, veido vienu novērojumu kopā ar attiecīgajām epohām un līmeņa mērījumiem. Lai uzlabotu novērojumu precizitāti un atkārtojamību, parasti var tikt veikti 40-50 novērojumi vienā stacijā. Novērojumi tiek veikti vairākos kameras virzienos, lai samazinātu CCD un līmeņrāžu nulles nobīdes ietekmi. Datu ieguvei iesaka veikt turp-atpakaļ virzienā. Šāda simetriska secība samazina sensora nobīžu lineārās variācijas, kas var rasties temperatūras izmaiņu ietekmē novērojumu laikā. Ja kameras līmenis pārsniedz kādu lietotāja noteiktu robežu pirms novērojuma sākuma, sistēma nekavējoties centrē kameras asi svērtēniskās līnijas virzienā [38]. Visbeidzot ar GNSS tiek noteiktas elipsoidālās koordinātas. Precīzāku rezultātu sasniegšanai iespējams izmantot GNSS bāzes staciju sistēmas.

Datu apstrāde sākas ar digitālo zenīta attēlu novērtēšanu. Zvaigžņu ieguves procedūra ietver zvaigžņu attēlu identificēšanu, izmērot to centra koordinātas. Zvaigžņu attēlus raksturo pikseļu grupas, kuru pelēkās vērtības ievērojami kontrastē ar apkārt esošajiem pikseļiem, kas attēlo debesis. Zvaigžņu pikseļu reģioni tiek atlasīti no attēla, izmantojot segmentēšanas metodes, piemēram, reģiona pieaugšanas tehniku [38]. Šīs metodes pamatideja ir sistemātiski pikseļu meklējumi attēlā, kas pārsniedz minimālo spožumu (pelēko vērtību), un pievienot visus blakus esošos pikseļus ar līdzīgu spožumu, tādā veidā radot segmentu. Tad tiek aprēķinātas segmentu koordinātas  $(x, y)$  attēlā, jo katra segmenta (veidota no pikseļiem  $i = 1, \dots, n$ ) koordinātas  $(x, y)_i$

tiek lineāri svērtas ar attiecīgo pelēko vērtību  $g_i$ . Otrā metode attēla koordinātu noteikšanai pamatojas uz modeļa funkcijas adaptēšanu zvaigznes attēlam, izmantojot mazāko kvadrātu metodes korekciju. Gausa līkne kļūdu izplatībai tiek izmantota kā standarta modelis, kas apraksta intensitātes izvietojumu zvaigznes attēlā [71] [94]. Abu attēla koordinātu mērījumu metožu precizitāte ir 0.1-0.2 pikseļi (attiecīgi leņķiskā precizitāte ir 0.3-0.4") [38].

Tālākai astrometriskai apstrādei nepieciešamas zvaigžņu ekvatoriālās koordinātas deklinācija  $\delta$  un rektascensija  $\alpha$ . Ekvatoriālās koordinātas ir atbalsts un tās var tikt ņemtas no digitālajiem zvaigžņu katalogiem. Kameras augstās gaismas jūtības dēļ, kas ļauj attēlot apmēram 14 miljonus zvaigžņu ar zvaigžņu lielumu līdz 14, ir nepieciešami blīvi un plaši zvaigžņu katalogi. Hipparcos zvaigžņu kataloga pozīciju precizitāte ir pat 1 mas (=0.001") [16]. Tycho un UCAC katalogi nodrošina precizitātes līmeni 0.02-0.03" [108]. Lai atrastu atbilstošās atbalsta zvaigznes no zvaigžņu katalogu datubāzes, ar GNSS noteiktā ģeodēziskā pozīcija ( $\varphi, \lambda$ ) tiek pieņemta kā aptuvenās astronomiskās koordinātas ( $\Phi, \Lambda$ )<sub>0</sub>. Šo koordinātu transformācija, ņemot vērā GAST, dod aptuvenās ekvatoriālās koordinātas ( $\delta, \alpha$ )<sub>0</sub> zenītam. Nepieciešamās zonas robežas ( $\delta, \alpha$ )<sub>min</sub>, ( $\delta, \alpha$ )<sub>max</sub> iegūst, ņemot vērā kameras FOV. Pozīcijas ( $\delta, \alpha$ ), kas tiek ņemtas no zvaigžņu kataloga, ir vidējās zvaigžņu pozīcijas un attiecas uz J2000 epochu. Izmantošanai astroģeodēzijā vidējās pozīcijas tiek transformētas uz redzamajām zvaigžņu pozīcijām, ņemot vērā no laika atkarīgos efektus (raksturīgo zvaigžņu kustību, precesiju, nutāciju, diennakts un ikgadējo aberāciju) [38].

Pēc tam jāizveido funkcionālais modelis. Tā kā attēla koordinātas ir plaknē ( $x, y$ ), identificētās zvaigznes nevar tikt tieši saistītas ar sfēriskajām ekvatoriālajām koordinātām ( $\delta, \alpha$ ), ņemtām no zvaigžņu kataloga, nepieciešams noteikt plaknes tangenciālās koordinātas ( $X, Y$ ) (astrometrijā – standarta koordinātas) kā starpposmu. Tangenciālās koordinātas ir līdzvērtīgas ekvatoriālajām koordinātām ( $\delta, \alpha$ ). Tās iegūst, projicējot sfēriskās koordinātas ( $\delta, \alpha$ ) uz tangenciālo plakni (gnomoniskā projekcija), kas virtuāli pieskaras debess sfērai kopējā punktā ( $\delta_0, \alpha_0$ ). Koordinātas ( $\delta_0, \alpha_0$ ) dod formula

$$\Phi = \delta \quad \Lambda = \alpha - \Theta, \quad (5.1)$$

izmantojot ekspozīcijas epochu  $\Theta$  un piešķirot elipsoidālās vērtības ( $\Phi_0, \Lambda_0$ ):=( $\varphi, \lambda$ ), kas tiek noteiktas ar GNSS. Tangenciālās koordinātas  $X$  un  $Y$  iegūst ar [38]

$$\begin{aligned} \cot q &= \cot \delta \cos(\alpha - \alpha_0) \\ X &= \frac{\tan(\alpha - \alpha_0) \cos q}{\cos(q - \delta_0)} \\ Y &= \tan(q - \delta_0). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Kā arī pretējā izteiksme [38]

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \arctan \frac{X}{\cos \delta_0 - \sin \delta_0} \\ \delta &= \frac{\arctan(Y + \tan \delta_0) \cos(\alpha - \alpha_0)}{1 - Y \tan \delta_0}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Pirms funkcionālā modeļa izveides tiek veikta zvaigžņu identifikācija. To dara, pamatojoties uz faktu, ka abiem zvaigžņu laukiem (no attēla un kataloga) raksturīga līdzīga zvaigžņu izvietojuma struktūra. Identiskas zvaigznes abos laukos veido trīsstūrus ar identisku proporciju, kas ir piemērots kritērijs, lai savietotu abus laukus [110].

Atbalsta zvaigžņu tangenciālās koordinātas ( $X, Y$ ) ir saistītas ar attēla koordinātām ( $x, y$ ) ar projekcijas transformācijas formulu

$$X = \frac{a_1 + b_1x + c_1y}{1 + dx + ey} \quad Y = \frac{a_2 + b_2x + c_2y}{1 + dx + ey}.\quad (5.4)$$

Astoņi transformācijas parametri  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d$  un  $e$  nepieciešami zenīta punkta interpolācijai un tiek noteikti ar mazāko kvadrātu metodi. Šis funkcionālais modelis ir labi zināms standarta astrometriskais modelis [32].

Arī vienkārša Helmerta transformācija ir piemērota precīzai tangenciālo koordinātu pārveidošanai attēla koordinātās identiskajām zvaigznēm

$$X = a_1 + b_1x + c_1y \quad Y = a_2 + b_2x + c_2y.\quad (5.5)$$

$a_1$  un  $a_2$  ir translācijas parametri starp abām koordinātu sistēmām, nosacījumus  $b$  un  $c$  izmanto mēroga faktora  $m$  un rotācijas leņķa  $A$  (attēli CCD astronomisko azimutu) aprēķināšanai

$$m = \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \quad (5.6)$$

$$A = \arctan\left(\frac{c_1}{b_1}\right) \quad (5.7)$$

Šī transformācija nav sliktāka par citām, jo CCD sensori, kas tiek izmantoti attēlu iegūšanai astronomijā, tiek ražoti ģeometriski precīzi, bez afinām īpašībām. Interpolāciju izpilda, katrai kameras pozīcijai transformējot sākotnējās zenīta punkta attēla koordinātas tangenciālajās

koordinātās (5.4) (vai (5.5)) un ekvatoriālajās koordinātās (5.3). Izmantojot  $\Phi = \delta$ ;  $\Lambda = \alpha - \Theta$ , iegūst aptuvenas astronomiskās koordinātas  $(\Phi, \Lambda)$ . No iegūtajiem attēliem tiek aprēķinātas vidējās astronomiskās koordinātas. Tālāka  $(\Phi, \Lambda)$  transformācija uz  $(x, y)$  tiek veikta visiem virzieniem atsevišķi, izmantojot (5.2) un (5.5). Aprakstītā procedūra tiek atkārtota divas vai trīs reizes. Rezultātā tiek iegūtas astronomiskās koordinātas  $(\Phi, \Lambda)_R$ , kas definē kameras asis ITRS sistēmā. Interpolācijas precizitāte (1 sigma) tika novērtēta kā 0.15-0.2", ja izmanto 10-20 zvaigznes. Lielāks skaits zvaigžņu precizitāti vairāk neuzlabo.

Nelielas novirzes starp kameras rotācijas asi  $(\Phi, \Lambda)_R$  un zenīta virzienu  $(\Phi, \Lambda)$  tiek mērītas ar elektroniskajiem līmeņrāžiem un tiek labotas. Ņemot vērā abu novērojumu epochu  $\Theta$  vidējo vērtību, zenīta punkta ekvatoriālās koordinātas  $(\delta, \alpha)$  var tikt transformētas astronomiskajās koordinātās  $(\Phi, \Lambda)$  [32]. Visas līmeņrāža vērtības  $(n_1, n_2, \dots)^I$  un  $(n_1, n_2, \dots)^{II}$  var izmantot precīzai korekcijai, lietojot transformācijas modeli [110]. Šis modelis precīzi novērtē novirzes no perpendikulārās orientācijas starp divām līmeņrāžu sensoru asīm (bīdes parametrs  $\varepsilon$ , piemēram, 89.5° nevis 90°), kā arī nesakritības starp kameras azimuta virzieniem (piemēram, 179.5°, nevis 180°). Pirmajā solī kameras virzieniem tiek izmantota novirzes korekcija

$$\begin{aligned} n_{1*}^I &= n_1^I \\ n_2^I &= \frac{n_2^I}{\sin \varepsilon} - \frac{n_1^I}{\tan \varepsilon}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

kur  $(n_1, n_2)^I$  ir līmeņa vērtības, kādas tās novērotas I virzienā (attiecinātas uz novirzīto sensora asi), un  $(n_{1*}, n_{2*})^I$  ir līmeņa vērtības, kas attiecinātas uz ortogonālo koordinātu sistēmu. Analogi otram kameras virzienam, ortogonālās līmeņa vērtības  $(n_{1*}, n_{2*})^{II}$  tiek aprēķinātas no novērotajām līmeņa vērtībām  $(n_1, n_2)^{II}$ , izmantojot (5.8) formulu. Nepieciešamais novirzes parametrs  $\varepsilon$  tiek noteikts kalibrēšanas procesā. Nākošajā solī kameras asu līmeņi  $(n_1, n_2)$  aprēķina kā funkciju no ortogonālajām līmeņa vērtībām  $(n_{1*}, n_{2*})^I$  un  $(n_{1*}, n_{2*})^{II}$  I un II virzienā un rotācijas leņķa  $d\alpha$  starp virzieniem I un II, kas ir starpība starp attēlu  $A^I$  un  $A^{II}$  astronomiskajiem azimutiem [38].

$$\begin{aligned} dA &= A^{II} - A^I \\ n_1 &= \frac{(\cos dA - 1)(n_{1*}^{II} - n_{1*}^I) - (\sin dA)(n_{2*}^{II} - n_{2*}^I)}{2(1 - \cos dA)} \\ n_2 &= \frac{(\cos dA - 1)(n_{2*}^{II} - n_{2*}^I) - (\sin dA)(n_{1*}^{II} - n_{1*}^I)}{2(1 - \cos dA)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Šī metode pilnībā novērtē nesakrītību starp kameras virzieniem un no rezultātiem izslēdz patvaļīgās līmeņrāžu novirzes kļūdas. Aprēķinātās līmeņa vērtības  $(n_1, n_2)$  I kameras virzienam attiecas uz ortogonālo koordinātu sistēmu un ataino kameras ass līmeni attiecībā pret svērtēnisko līniju.

Līmeņa korekcijas  $(\delta\Phi_n, \delta\Lambda_n)$  aprēķina, rotējot  $(n_1, n_2)$  vērtības uz lokālo astronomisko koordinātu sistēmu un novērtējot meridiānu konvergenci

$$\begin{aligned}\delta\Phi_n &= \cos(A^I + \beta)n_1 - \sin(A^I + \beta)n_2 \\ \delta\Lambda_n &= \sin(A^I + \beta)n_1 + \cos(A^I + \beta)n_2 / \cos\Phi,\end{aligned}\tag{5.10}$$

kur  $A^I$  ir CCD sensora azimuts I kameras virzienam,  $\beta$  ir leņķis starp CCD sensoru un līmeņrāžu sensoru; un  $\Phi$  ir astronomiskais platumš.

Tā kā kameras astronomiskās koordinātas  $(\Phi, \Lambda)$  attiecas uz pašreizējo Zemes rotācijas polu, kas maina tā pozīcijas līdz ar laiku, tiek veikta reducēšana uz fiksēto Starptautisko Zemes Rotācijas un Atbalsta Sistēmu Servisu (*IERS – International Earth Rotation and Reference System Service*).

Polārās kustības korekcijas formula [98]:

$$\begin{aligned}\delta\Phi_P &= -(x_p \cos\Lambda - y_p \sin\Lambda) \\ \delta\Lambda_P &= -(x_p \sin\Lambda + y_p \cos\Lambda) \tan\Phi,\end{aligned}\tag{5.11}$$

kur  $(x_p, y_p)$  ir terestriālā pola koordinātas, attiecinātas uz IERS atbalsta polu. Pievienojot līmeņa korekcijas (5.10) un polārās kustības korekcijas (5.11) kameras asu koordinātām  $(\Phi, \Lambda)_R$ , nonāk pie noteikta svērtēniskās līnijas virziena  $(\Phi, \Lambda)$ :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_R + \delta\Phi_n + \delta\Phi_P \\ \Lambda &= \Lambda_R + \delta\Lambda_n + \delta\Lambda_P.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Gala rezultātā, ņemot vērā kameras ģeodēzisko pozīciju  $(\varphi, \lambda)$ , tiek noteiktas vertikāles novirzes  $(\xi, \eta)$ .

## 6. DIGITĀLĀ ZENĪTTELESKOPA MONTĀŽAS MODELIS

Nesenie sasniegumi precīzu astrometrisko zvaigžņu atbalsta katalogu, digitālo attēlu iegūšanas tehnoloģiju, augstas precizitātes līmeņrāžu tehnoloģiju attīstībā un GNSS ģeocentrisko koordinātu nodrošināšanā, dod iespēju precīzai, ātrai un automatizētai vertikāles noviržu noteikšanai, izmantojot astroģeodēziskās metodes. Latvijas Universitātē, Ģeodēzijas un ģeoinformātikas institūtā 2010.gadā tika uzsākts projekts ar mērķi konstruēt pārnēsājamu digitālo zenītteleskopu vertikāles noviržu noteikšanai ar sagaidāmo precizitāti 0.1".

### 6.1. Digitālā zenītteleskopa konstrukcija

Pārsvārā visi digitālie zenītteleskopi balstās uz līdzīgiem konstrukcijas pamatprincipiem – tie sastāv no optiskās sistēmas ar digitālo attēlu iegūšanas ierīci (parasti tā ir CCD sistēma) uz montāžas, kas aprīkota ar precīzu līmeņrādi, ko iespējams rotēt ap vertikālu asi. Konstrukcija, kas izveidota Ģeodēzijas un ģeoinformātikas institūtā, ir līdzīga (6.1. att.).

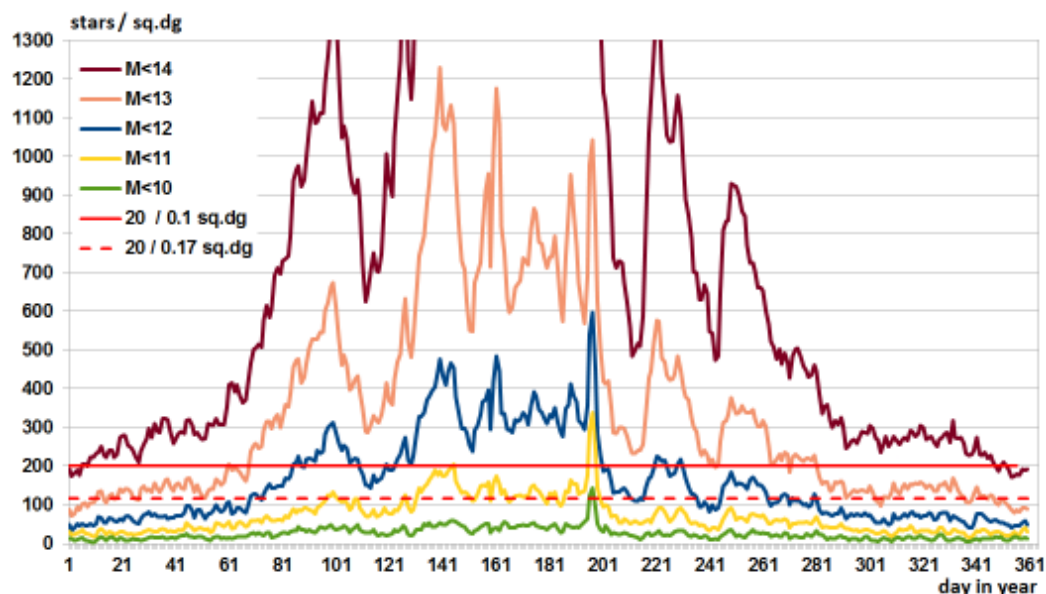


6.1. att. Digitālās zenītkameras prototips (pa kreisi), gala konstrukcija (vidū) un gala konstrukcijas projektējums (pa labi)

Prototipa zenītkamera ir 20 cm katadioptrisks teleskops ar 1390 mm fokusa attālumu un CCD attēlu iegūšanas ierīci ar 1350x1024 kvadrātveida 6.45 mkm pikseļiem, ar kuru iespējams aptvert 0.35x0.27 grādu lielu zvaigžņu lauku (pikseļa izšķirtspēja ir 0.95", iegūtā attēla lauks ir 0.1x0.1 grāds). Uzbūvētā prototipa optiskā sistēma ir oriģināla un tās patenta pieteikums Nr. P-13-

45 „Katadioptriska optiska sistēma ar difrakcijas izšķiršanas spēju pa visu redzeslauku” 08.04.2013. iesniegts LR Patentu valdē. Gala konstrukcijā tiks izmantota nedaudz lielāka optika (8 collu katadioptrisks teleskops ar 2000 mm fokusa attālumu) un attēlu iegūšanas ierīce (3300x2500 kvadrātveida 5.4 mkm pikseļi; pikseļa izšķirtspēja 0.56"; 0.5x0.39 grādu liels zvaigžņu lauks). Teleskops atrodas uz horizontālas pamata virsmas, to balsta trīs precizitātes gultņi, un to var rotēt ap vertikālo asi par jebkuru leņķi, izmantojot soļu motoru. Līmeņrādis ir uzmontēts uz teleskopa cilindra. Gala konstrukcijā paredzēts, ka rotējošajai daļai enerģijas avots būs baterijas un komunikācija ar datoru tiks nodrošināta ar bezvadu (WiFi) komunikācijas ierīci.

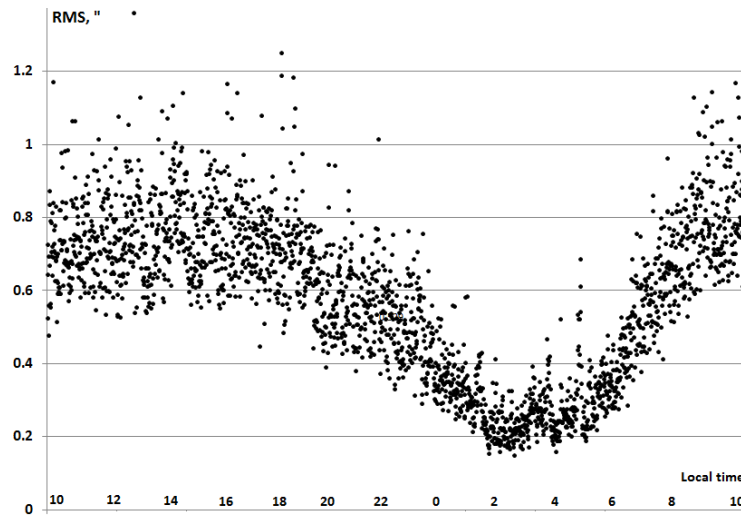
Attēli, iegūti ar prototipa instrumentu, bieži vien pilsētas centra vidē, kur traucējumus rada smogs, spilgts pilsētas apgaismojums, vibrācijas, kuras izraisa transporta kustība un citas aktivitātes, parāda zvaigznes līdz 13<sup>m</sup> magnitūdai pie 0.1 sekundes ekspozīcijas. Gala konstrukcijā sagaidāms iegūt zvaigžņu attēlus līdz 14<sup>m</sup> magnitūdai. Pieredze rāda, ka ir nepieciešams iegūt vismaz 20 atbalsta zvaigžņu attēlus, lai optimāli noteiktu attēla pozīciju. Ņemot vērā zvaigžņu blīvuma izvietojuma variācijas (6.2. att.), 12<sup>m</sup> ir pietiekami 20 zvaigznēm 0.1x0.1 grāda attēla laukā pavasarī un vasarā, jo Latvijas platuma grādos šajā periodā zvaigžņu blīvums ir lielāks, pārējā laikā vismaz 14<sup>m</sup> ir nepieciešama, lai attēlā iegūtu vēlamās 20 zvaigznes. Šādi zvaigžņu magnitūdu limiti arī nozīmē to, ka Hypparcos un Tycho-2 katalogi [44] nav pietiekami, jāizmanto plašāki, bet ziemā mazāk precīzi zvaigžņu katalogi, kā UCAC2, USNO-B [70] vai NOMAD [107].



6.2. att. Zenīta zvaigžņu skaita pusnaktī (UT) variācijas gada laikā, novērojumu vietai ar 57° ģeogrāfisko platumu un 24° garumu

Attēla ekspozīcijas moments attiecībā pret GNSS laika skalu tiek iegūts no brīža, kad tiek sākts attēla iegūšanas process. Iegūto zvaigžņu attēlu laika noteikšanas precizitāte ir noteikta 10

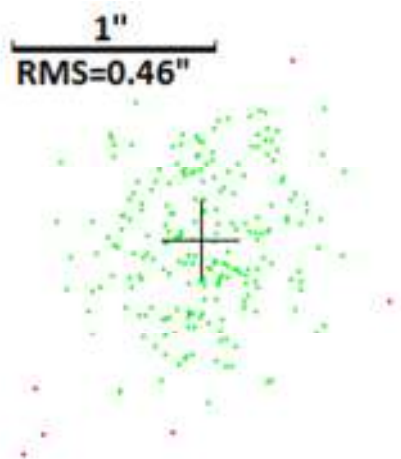
milisekunžu robežās, izejot no tā, rezultējošā zvaigžņu pozīcijas precizitāte ir līdz 100 mili loka sekundēm, kas ir salīdzināma ar citu potenciālo kļūdu avotu ietekmi.



6.3. att. Līmeņrāža pozīcijas RMS vienas diennakts laikā (noteikta, izmantojot virknes pa 100 novērojumiem)

Zenītteleskopa konstrukcijā izmantots precīzais līmeņrādis HRTM [111], tam ir 50 prad ( $\sim 1e^{-5}$ ) izšķirtspēja  $\pm 2'$  robežās. Fona vibrāciju dēļ nepārtrauktu nolasījumu virknes RMS mainās no 2-3" iekštelpās līdz 0.2..1" uz stabilas pamatnes pilsētā (6.3. att.). Lauka apstākļos fona vibrācijas iespējamās mazāk traucējošas.

Ja svērteņa līnijas virziens tiek aprēķināts, izmantojot  $\sim 100$  nolasījumu virknes, iegūtas 10-20 sekunžu laikā, noteiktā virziena precizitāte ir zem 100 mili loka sekundēm (6.4. att.).



6.4. att. Līmeņrāža nolasījumu precizitāte attēlam (10 nolasījumi sekundē)

Sagaidāmā vertikāles noviržu precizitāte, iegūta ar prototipa instrumentu, tiek novērtēta ar 0.1"-0.2", gala konstrukcijai – labāka nekā 0.1".



## 6.2. Datu modelis

Zenītteleskopa astrometriskā daļa iegūst attēlus tuvu zenīta reģionam. Pēc zvaigžņu attēlu identifikācijas ar atbalsta kataloga zvaigznēm var noteikt referencilipsoīda normāles projekcijas vietu attēla koordinātu sistēmā.

Telpā ir izdalīti divi virzieni:  $Z$  - uz elipsoidālo (astrometrisko) zenītu, ko nosaka pēc zvaigžņu novietojuma (situācija ekvivalenta zenīta marķera esamībai);  $G$  - gravitācijas lauka gradienta virziens, ko nosaka līmeņrādis.

Gravitācijas lauka intensitātes sakarības nosaka, ka meklējamais lielums ir šo virzienu atšķirība  $G - Z$ . To var izteikt ar virzienu (azimutu no  $Z$  uz  $G$ ) un lielumu (horizontālā lauka komponente  $mGal$  vienībās;  $1 Gal = 1 cm/s^2$ ; kā  $|G - Z|[rad] * g [cm/s^2] * 1000 = |G - Z|["] * 4.756 mGal$ ).

Pie gravitācijas lauka deviācijas sakarības ar līmeņa virsmas ģeocentriskā attāluma izmaiņu:

$$\frac{dG}{dR} = -\frac{2G}{R} = -0.293 \frac{mGal}{m}, \quad (6.1)$$

kur  $dR[m] = -3.411 dG[mGal]$  un  $dG[mGal] = -0.293 * dR[m]$ , tad līmeņa virsmas slīpums pret elipsoīdu  $dR[m]/dx = 3.411 dG[mGal]/dx$ .

Ģeoīda virsmas izmaiņa par metru (3.411 mGal izmaiņa  $G$  vertikālajā komponentē) uz 100 kilometriem atbilst vertikāles noliecei  $\sim 2''$  un lauka intensitātes horizontālajai komponentei  $\sim 9.5 mGal$ . Rīgas tuvumā līmeņa virsmas izmainās par  $\sim 1m/25 km$ , tātad sagaidāms, ka vertikāles noliece būs  $\sim 8''$  un  $G$  horizontālā komponente būs  $\sim 39 mGal$ .

Atrodot vertikāles nolieci  $dZ["] = dR/dx$ , var noteikt atbilstošo  $G$  horizontālo gradientu:  $\frac{dG[mGal]}{dx[Mm]} = 1.42 dZ["]$ . Rīgas teritorijā tas tuvojas  $\sim 11 mGal/Mm$ .

Konstrukcijas virzieni:  $R$  - rotācijas ass; vajadzētu būt stabilai seansa ietvaros;  $O$  - optiskā ass; rotē ap  $R$  veidojot riņķa konusu, attēls uz matricas veidojas attiecībā pret  $O$ ;  $L$  - līmeņrāža ass; rotē ap  $R$  kopā ar  $O$ , veidojot riņķa konusu (bet ar citu rādiusu un sakuma leņķi nekā  $O$ ); nolasījumi ir attiecībā pret  $L$  asi, ass orientāciju horizontālā plāknē jānoregulē iespējami paralēli matricas orientācijai.

Lai atrastu  $G - Z$ , konstrukcija tiek griezta ap  $R$ , izdarot zvaigžņu reģistrāciju un līmeņraža nolasījumus pie virknes pagriezienu leņķa  $A$  vērtību.

Lai līmeņrādi varētu nolasīt,  $L$  jābūt pietiekami tuvu  $G$ . To var panākt tikai atbilstoši iestādot  $R$ , kas aprīkota ar mazo līmeņrādi, līdz ar to nepieciešams, lai atšķirība  $R$  un  $L$  virzienos

nepārsniegtu dažas loka minūtes, kas panākams, regulējot mazo līmeņrādi atbilstoši lielā rādījumiem, lai abi nullpunkti būtu iespējami tuvu.

Veicot zvaigžņu novērojumus, atrodam zenīta projekciju uz matricas  $x_{zo}$ ,  $y_{zo}$  (matricas sistēmā, kurā,  $y$  ass vērsta uz leju,  $x$  ass vērsta pa labi). Šī projekcija saistīta ar  $O$  stāvokli telpā attiecībā pret  $Z$ , griežot  $R$ ,  $O$  apraksta ap  $R$  konusu,  $Z$  var būt gan tā iekšpusē, gan ārpusē.

Projekcija uz vienības sfēru ir ar CCD sākuma stāvokli raksturotā nekustīgā koordinātu sistēmā (invertēta, ar skatu no apakšas), kuras centrs  $R$ ,  $Y$  ass no  $N$  (ziemeļu) virziena (uz leju uz matricas),  $X$  ass  $W$  (rietumu) virzienā (pa labi uz matricas, pa kreisi, skatoties no augšas),  $A$  no  $N$  virziena uz  $E$  (konstrukcijas sākotnējā  $N$  punkta azimuts), optiskā centra  $O$  koordinātas ir:

$$X_o = -r_o \sin(A + A_o); \quad Y_o = -r_o \cos(A + A_o) \quad (6.2)$$

kur  $A_o$  - optiskās ass projekcijas azimuts pie  $A = 0$ ;  $r_o$  - optiskā centra attālums no  $R$  ass (abi sesijas ietvaros nemainās);  $A$  - konstrukcijas pagriezienu leņķis no stāvokļa, kad matricas  $y$  ass vērsta no  $N$  virziena, šo vērtību iegūst, apstrādājot kadru.

Zvaigznes ( $z, A$ ) koordinātas matricas sistēmā:

$$dx = -z \sin A - A0; \quad dy = -z \cos A - A0, \quad (6.3)$$

kur  $A0$  - konstrukcijas pagriezienu leņķis.

Zenīta projekcijas koordinātas nerotējošā sistēmā ir fiksētas:

$$Y_z = -r_z \cos A_z; \quad X_z = -r_z \sin A_z, \quad (6.4)$$

kur  $r_z$  - zenīta attālums no  $R$ ,  $A_z$  - zenīta projekcijas azimuts (abi sesijas ietvaros nemainās).

Tātad zenīta projekcijas koordinātas pret optisko centru ( $Z - O$ ) nerotējošā sistēmā ir:

$$\begin{aligned} Y_{zo} &= -r_z \cos A_z + r_o \cos(A + A_o); \\ X_{zo} &= -r_z \sin A_z + r_o \sin(A + A_o), \end{aligned} \quad (6.5)$$

kur  $r_o$  ir no sākumpunkta nobīdīta apla rādiuss.

Matricas sistēma ir rotējoša. Tās sākuma punkts uz matricas ir augšējā  $K$  stūrī;  $y$  ass virziens uz  $R$  (uz leju),  $x$  ass, pa kreisi, skatoties no augšas (pa labi uz kadru, kas ir skats no apakšas), optiskā ass  $O$  projicējas fiksētā punktā  $\{x_0, y_0\}$ , rotācijas leņķis (no stāvokļa, kad

matricas  $y$  ass no  $N$  virziena,  $A = 0$ ) ir  $-A$  (pretējā virzienā  $Z$  rotācijai). Koordinātas rotējošā matricas sistēmā  $(x, y)$  saistītas ar fiksētajām  $(X, Y)$  ar sākumu  $O$  projekcijā:

$$x = x_0 - X \cos A - Y \sin A; \quad y = y_0 - X \sin A + Y \cos A, \quad (6.6)$$

kur zenīta koordinātas matricas sistēmā būs:

$$\begin{aligned} x_{zo} &= x_0 - (-r_z \sin A_z + r_o \sin(A + A_o)) \cos(-A) - (-r_z \cos A_z + r_o \cos(A + A_o)) \sin(-A) \\ &= x_0 + r_z \sin(A_z - A) - r_o \sin A_o \\ &= x'_0 + r_z \sin(A_z - A), \\ y_{zo} &= y_0 - (-r_z \sin A_z + r_o \sin(A + A_o)) \sin(-A) + (-r_z \cos A_z + r_o \cos(A + A_o)) \cos(-A) \\ &= y_0 + r_z \cos(A_z - A) - r_o \cos A_o \\ &= y'_0 + r_z \cos(A_z - A), \end{aligned} \quad (6.7)$$

kur nezināmie lielumi ir  $x'_0, y'_0, A_z, r_z, A_o$  un  $r_o$  atrodami tikai summā ar  $x_0, y_0$ .

(6.7) apraksta riņķi ar rādiusu  $r_z$  un centru, kas par  $r_o$  nobīdīts no optiskās ass projekcijas uz matricu pretēji optiskās ass novietojumam pie  $A = 0$ . Vajadzīgas vismaz 3 zenīta pozīcijas  $\{x_{zo}, y_{zo}\}$  novērojumi pie dažādiem  $A$ , lai sistēmu atrisinātu. Tā ir transcendentāla attiecībā pret  $A_z$ , risinājums var būt iteratīvs. Rezultātā iegūtas zenīta koordinātas (6.4) nekustīgā sistēmā ar centru uz rotācijas ass. Nekustīgajā sistēmā (centrs uz rotācijas ass,  $y$  ass  $N$  virzienā) līmeņrāža  $Z$  ass virziena  $L$  projekcija ir:

$$X_l = r_l \sin(A + A_l); \quad Y_l = -r_l \cos(A + A_l), \quad (6.8)$$

kur  $r_l, A_l$  atbilstoši attālums no  $R$  un azimuts, tie sesijas ietvaros nemainās. Pieņemot, ka līmeņrāža  $Y$  un  $X$  asis orientētas paralēli atbilstošajām matricas asīm, nolasījumi  $L_x$  un  $L_y$  rādīs leņķus starp  $L$  un  $G$  rotējošā koordinātu sistēmā.

Gravitācijas gradienta virziena  $G$  projekcija nerotējošā sistēmā ir fiksēta:

$$X_g = r_g \sin A_g; \quad Y_g = -r_g \cos A_g, \quad (6.9)$$

kur  $r_g, A_g$  atbilstoši gravitācijas gradienta projekcijas attālums no  $R$  un azimuts. Tātad  $G$  koordinātas attiecībā pret  $L$ , kas atspoguļojas nolasījumos, ir, līdzīgi kā (6.5):

$$\begin{aligned} X_{gl} &= -r_g \sin A_g + r_l \sin(A + A_l); \\ Y_{gl} &= -r_g \cos A_g + r_l \cos(A + A_l); \end{aligned} \quad (6.10)$$

jeb rotējošā (līmeņrāža) sistēmā (ar sākuma punktu uz līmeņrāža ass  $L$ ), līdzīgi kā (6.7):

$$\begin{aligned} x_{gl} &= (r_g \sin A_g - r_l \sin(A + A_l)) \cos(-A) + (r_g \cos A_g - r_l \cos(A + A_l)) \sin(-A) \\ y_{gl} &= (r_g \sin A_g - r_l \sin(A + A_l)) \sin(-A) \\ &\quad + (r_g \cos A_g - r_l \cos(A + A_l)) \cos(-A), \end{aligned} \quad (6.11)$$

kur

$$\begin{aligned} x_{gl} &= r_g \sin(A_g - A) - r_l \sin A_l; \\ y_{gl} &= r_g \cos(A_g - A) - r_l \cos A_l \end{aligned} \quad (6.12)$$

Šeit  $x_{gl}, y_{gl}$  - līmeņrāža nolasījumi, kas transformēti leņķa vienībās, nezināmie ir  $r_g, A_g, r_l, A_l$ .

(6.12) apraksta riņķi ar rādiusu  $r_g$ , kura centrs atrodas attālumā  $r_l$  no nullpunkta. (6.12) un (6.7) pievienojas augstākas kārtas  $A$  harmonijas, kas atspoguļo pamatplaknes konstrukcijas deformācijas:

$$dx = r_{nx} \sin(n(A_{nx} + A)); \quad dy = r_{nx} \cos(n(A_{nx} + A)), \quad (6.13)$$

kur  $|n| > 1$  ( $\pm 2, 3, \dots$ , situācijā ar 3 balstiem un cilindrisku pamatplakni  $n = \pm 3$ ).

Atrisinot sistēmu (6.7, 6.12, 6.13), kas ir transcendentāla pret  $A_z, A_g, A_{nx}$ , iegūsim gravitācijas gradienta virziena projekciju  $G$  uz nekustīgo sistēmu (6.9), līdz ar to arī starpību starp  $G$  un  $Z$ :

$$\begin{aligned} Y_{zg} &= r_z \cos A_z - r_g \cos A_g; \\ X_{zg} &= r_z \sin A_z - r_g \cos A_g. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Papildus teiktajam, jāņem vērā starpība starp līmeņrāža un matricas asu virzieniem  $dA$  (starpība starp orientācijas azimutiem), kuru var noteikt ar atbilstošu mērījumu komplektu, sistēmu griežot ap horizontālu asi (mainot vienas trijkāja kājas pacēlumu).

Šādā seansā zenīta punkti apraksta trajektoriju, kas tuva taisnei, mērījumiem abās apakšsistēmās jānovieto uz taisnēm :

$$\begin{aligned} dyz/dxz &= tg(A + Az); \\ dyg/dxy &= tg(A + Ag + dA), \end{aligned} \quad (6.15)$$

leņķis  $dA$  starp tām atspoguļo starpību asu virzienos. Šis leņķis, apstrādājot  $G$  apakšsistēmas datus, jāpieskaita visām  $A$  vērtībām. Pieņemot, ka deformācijas vienādi ietekmē abas apakšsistēmas, atbilstošās vienādojumu sistēmas var risināt kopīgi, ar vienu deformāciju komplektu. Lai aprēķinātu redzamo zvaigžņu vietas, tiek izmantotas novērojumu vietas ģeogrāfiskās koordinātas, kuras aprēķina, izmantojot taisnleņķa ģeocentriskas GNSS koordinātas. Tās attēlo normāli pret referencilipsoīda virsmu.

NOVAS programmatūra [58] [59] ir primārais zvaigžņu redzamo vietu avots, iespējams arī izmantot Starlink [11], kas dod gandrīz identiskus rezultātus. Zenīta tuvumā attēla koordinātu plaknes aproksimācija ir pietiekoši precīza (zenīta attāluma kļūda  $z < 5$  mili loka sekundes, ja  $z < 0.25$  grādi un attēla plaknes perpendikularitāte zenīta virzienam ir  $0.25$  grādu robežās). Optiskās distorsijas un refrakcija tik mazā attēla laukā arī ir ļoti mazas. Šo aproksimācijas kļūdu efekts uz attēla pozīciju tiek ievērojami kompensēts, ja atbalsta zvaigžņu izvietojums ap zenītu ir tuvs simetriskam.

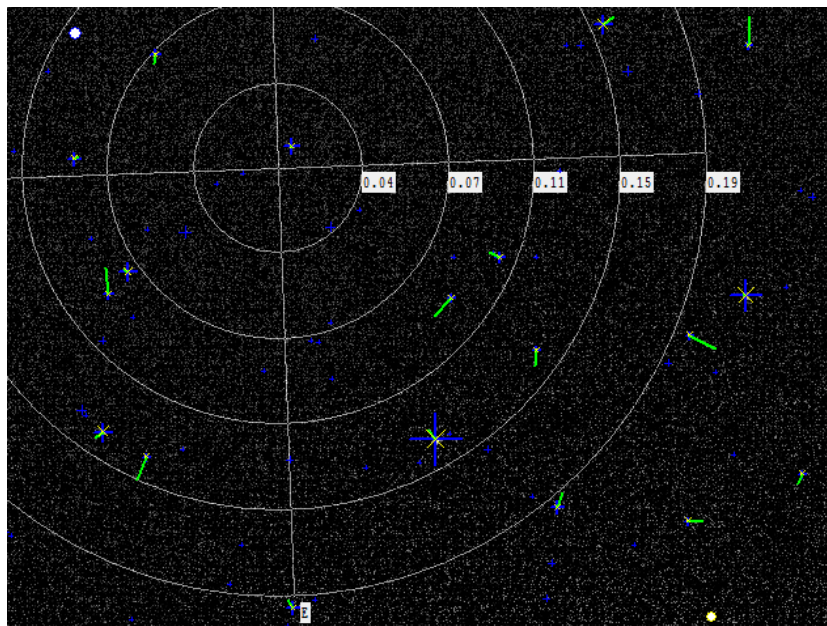
Plaknes aproksimācijā taisnleņķa attēla koordinātu  $x_s, y_s$  atkarību no azimuta  $A_s$ , un attālumu no elipsoīda normāles projekcijas punkta  $z$  var attēlot kā:

$$\begin{aligned} x_s - x_{s0} &= F \cdot tg(z) \cdot \sin(A - A_0) \\ y_s - y_{s0} &= -F \cdot tg(z) \cdot \cos(A - A_0), \end{aligned} \quad (6.16)$$

kur  $x_{s0}, y_{s0}$  - referencilipsoīda normāles projekcija attēla plaknē,  $F$  – fokusa attālums,  $A_0$  - attēla koordinātu sistēmas  $y$  ass negatīvā virziena azimuts.  $y$  ass virziens ir vērsts uz leju, kas ir raksturīgi lielākajai daļai attēla iegūšanas ierīcēm. Ja  $x_s, y_s$  tiek mērītas attēla pikseļos, arī  $F$  jābūt izteiktam pikseļos. Kā pikseļa attāluma vērtība parasti netiek dota ar precizitātes novērtējumu, praksē  $F$  vajag noteikt kā vienu no nezināmiem mainīgajiem. Šāda  $F$  noteikšana ietver arī daļu no diferenciālās refrakcijas un distorsijas ietekmes. Formulu (6.16) var atrisināt, ja tiek identificētas vismaz 2 zvaigznes, aprēķini ir iteratīvi, konverģence ir diezgan ātra.

Attēlu apstrāde (6.5. att.) parāda, ka tipiska attēla modeļa RMS ir 1/3 daļa no pikseļa izmēra ( $0.25'' - 0.35''$  pašreizējai konstrukcijas konfigurācijai). Tā ir nedaudz labāka, ja attēla kvalitāte ir laba, bet pasliktinās līdz  $1'' - 2''$  stipras konvekcijas, vējaina laika vai fona vibrāciju

apstākļos. Ja zvaigžņu skaits attēlā ir aptuveni 20, labos apstākļos tas dod attēla pozīcijas precizitāti līdz pat 50-60 mili loka sekundes.



6.5. att. Apstrādāts zenīta apgabala attēls. Kataloga zvaigznes līdz  $13^m$  ir parādītas kā taisni krustiņi, to lielums proporcionāls zvaigžņu magnitūdai, attēla zvaigznes – kā slīpi krustiņi, zaļās līnijas attēlo aproksimācijas nesaistes

Ar līmeņrādi tiek mērītas svērteņa līnijas projekcijas koordinātas līmeņrāža koordinātu plaknē  $x_t, y_t$ . Līmeņrāža z ass orientācijai jābūt pielāgotai tuvu gan svērteņa līnijai, gan instrumenta rotācijas ass virzienam, praktiski korekcijas precizitāte vienmēr būs ierobežota līdz vertikāles novirzes vērtībai – vismaz dažas loka sekundes. Līmeņrāža koordinātu sistēma tiks rotēta par kādu leņķi  $A_t$ , relatīvi pret attēlu iegūšanas ierīces koordinātu sistēmu, šim leņķim, uzmanīgi iestādot, vajadzētu būt vai nu ļoti mazam, vai arī izmērītam vismaz ar pāris arkminūšu precizitāti, novērojot gan zvaigznes, gan svērteņa līnijas virzienu, kamēr tiek mainīti rotācijas asu virzieni vertikālā plaknē (piemēram, nedaudz paceļot konstrukciju).

Novērojumi, izdarīti dažādos konstrukcijas rotācijas azimutos  $A$ , dod virkni svērteņa līnijas un elipsoīda normāles pozīciju rotējošās attēla iegūšanas ierīces un līmeņrāža koordinātu sistēmās. Ideālas konstrukcijas gadījumā šo pozīciju trajektorijas būtu apli, nobīdīti no nulles punkta:

$$\begin{aligned} X_{ZA} &= X_{0A} + R_Z * \sin(A_Z - A), \\ Y_{ZA} &= Y_{0A} + R_Z * \cos(A_Z - A), \end{aligned} \quad (6.17)$$

kur projekcijas normālei  $X_{0A}, Y_{0A}$ , atkarīgi no attēla optiskā centra pozīcijas un optiskās

ass, pozīcija ir relatīva rotācijas asij,  $R_Z$  - leņķis starp elipsoīda normāli un rotācijas asi,  $A_Z$  - elipsoīda normāles projekcijas azimuts, skatoties no rotācijas ass.

Līdzīgi līmeņrāža zenīta punkts (svērteņa līnijas projekcija):

$$\begin{aligned} X_{ZG} &= X_{0G} + R_G \sin(A_G - A), \\ Y_{ZG} &= Y_{0G} + R_G \cos(A_G - A), \end{aligned} \quad (6.18)$$

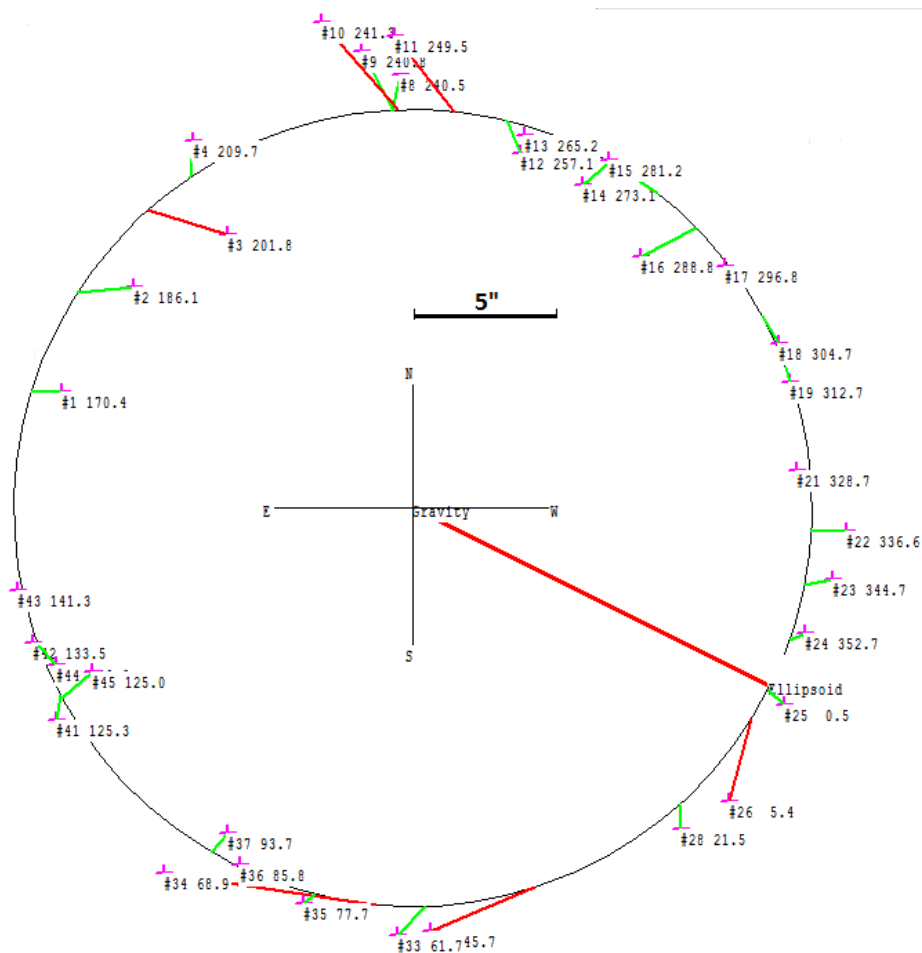
kur  $R_G$  ir leņķis starp svērteņa līniju un rotācijas asi,  $A_G$  ir svērteņa līnijas projekcijas azimuts, skatoties no rotācijas ass,  $X_{0G}, Y_{0G}$  atkarīgas no līmeņrāža  $Z$  ass pozīcijas attiecībā pret rotācijas asi.

Pieņemot, ka rotācijas ass abām trajektorijām ir viena un tā pati, atšķirības starp (6.17) un (6.18) (ņemot vērā orientācijas un mēroga atšķirības abās iesaistītajās koordinātu sistēmās) apraksta elipsoīda normāles pozīciju, relatīvu pret svērteņa līniju, rotējošā koordinātu sistēmā:

$$\begin{aligned} X_{ZA} - X_{ZG} &= x_0 - \sin A \cdot Y_D + \cos A \cdot X_D, \\ Y_{ZA} - Y_{ZG} &= y_0 + \sin A \cdot X_D + \cos A \cdot Y_D, \end{aligned} \quad (6.19)$$

kur  $x_0, y_0$  ir apla centrs,  $A$  - pašreizējais azimuts,  $X_D, Y_D$  – vertikāles noviržu komponentes (leņķis no elipsoīda normāles pret svērteņa līniju) topocentriskā koordinātu sistēmā.

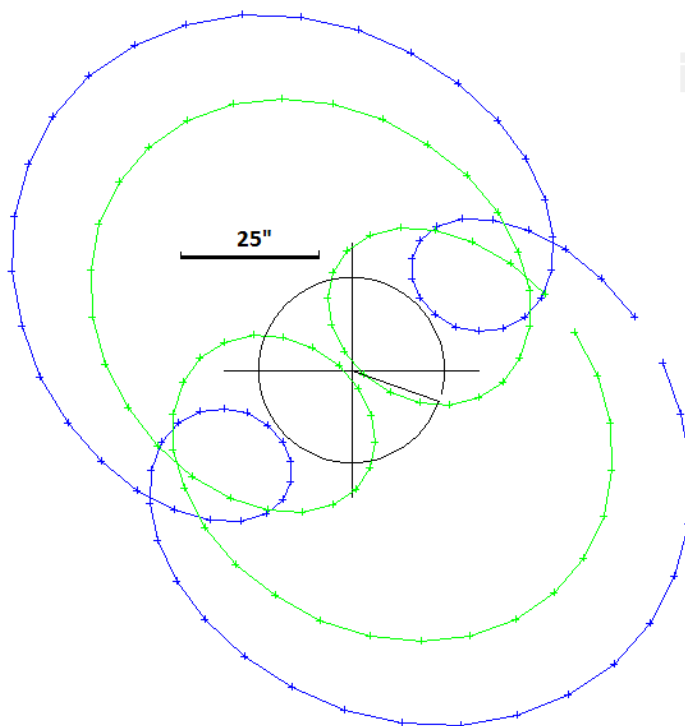
Formula (6.19) ataino apli rotējošā koordinātu sistēmā (6.6. att), tā izmēru un fāzi nosaka vertikāles novirzes vērtība, pozīciju – instrumenta slīpums un tā komponentu noregulēšana. Vienādojumu sistēma (6.19) var tikt atrisināta, izmantojot standarta mazāko kvadrātu algoritmu. Ja attēla iegūšanas ierīce un līmeņrādis pieredz vienādas izmaiņas orientācijā, kad instrumenta rotējošā daļa kustas, starpība (6.19) ir nemainīga, to neietekmē instrumenta rotācijas neregularitātes un atbalsta struktūras orientācijas izmaiņas, ja vien orientācijas izmaiņas nenotiek attēla iegūšanas un līmeņrāža nolasījumu laikā. Rezultātā instrumenta pamatnes stabilitātes un rotācijas mehānisma precizitātes prasības nav pārāk striktas, ir pietiekoši, ja instrumentam ir laba stabilitāte laika intervālā (parasti 10-20 sekundes), kurā tiek veikti attēla mērījumi. No otras puses, attēla iegūšanas sistēmas un līmeņrāža relatīvai orientācijai jābūt pēc iespējas stabilākai, iespējams, ka termiskie pārvietojumi šajā mehānisma struktūrā būs faktors, kas ierobežos novērojumu seansa ilgumu.



6.6. att. Novērotās atšķirības starp svērteņa līnijas virzienu un referencilipsoīda normāli rotējošā koordinātu sistēmā. Sarkanā līnija ataino pozīciju, kad attēlu iegūšanas ierīces Y ass vērsta uz dienvidiem

Atšķirībā no starpības (6.16) formulā, (6.17) un (6.18) ietekmē atbalsta plaknes un gultņu neregularitātes, iespējamās izmaiņas instrumenta orientācijā, mainot ideālo apla gadījumu uz diezgan sarežģītām struktūrām. Neregularitāšu īpašības var būt individuālas katram montāžas eksemplāram. Šī zenītteleskopa prototipa neregularitātes var aprakstīt kā summu no divām cilindriskām atbalsta plaknes deformācijām ar pretēju liekuma virzienu. Pievienojot trešās harmonijas locekļus formulās (6.17) un (6.18) ar 33" un 2" amplitūdu, rezultējošās zenīta punkta trajektorijas redzamas 6.7.att.





6.7. att. Referencilipsoīda normāles (zila) un svērteņa līnijas (zaļa) virziena trajektorijas rotējošā koordinātu sistēmā, un starpība starp tām (melna), kas ataino to relatīvo rotāciju

### 6.3. Programmatūra

Mērķis ir padarīt novērojumu un datu apstrādes procesu tik automatizētu, cik vien iespējams. Ja instruments ir atbilstoši noregulēts un uzstādīts, operatora vienīgajai darbībai jābūt mērījumu seansa uzsākšanai. Lielākā daļa no sistēmas automatizācijas pamata komponentēm jau ir izstrādātas. Tomēr daļēji manuāla kvalitātes kontrole būs vienmēr nepieciešama, tāpēc visus procesus iespējams kontrolēt arī manuāli un tie tiek vizualizēti, kad vien tas ir nepieciešams.

Kontroles sistēma darbojas Windows operētājsistēmā. Vadības datoram jābūt aprīkotam ar USB un bezvadu komunikāciju ierīci instrumenta kontrolei un datu apmaiņai. Kontroles programmatūra ir rakstīta C valodā un izmanto vairākas funkcionālās bibliotēkas – aparatūras kontrolei (aktuatori, soļu motori, attēla iegūšanas ierīce) un astrometrisko zvaigžņu redzamības vietu aprēķiniem (NOVAS vai StarLink) [2].

### 6.4. Zenītteleskopa novērojumu analīze

Turpmāk aprakstīti galvenie novērojumu seansi, kas tika veikti pēc attēlu iegūšanas bloka un precīzā līmeņrāža integrēšanas zenītteleskopa konstrukcijā. Sākotnēji konstrukcija bija aprīkota ar pagaidu līmeņrāža un pagriešanas ierīcēm. Tika veikta galvenās optikas justēšana. Pēc tam tika veikti pirmie zvaigžņu novērojumi, lai novērtētu optiski-mehāniskās sistēmas raksturlielumus. Pirmie rezultāti parādīja, ka pat slikta astroklimata apstākļos izdodas fiksēt zvaigžņu attēlus līdz 13

magnitūdai, kas nodrošina pieņemamu atbalsta zvaigžņu skaitu praktiski jebkurā situācijā. Tā kā sākotnēji lietotais Tycho-2 zvaigžņu katalogs satur zvaigznes tikai līdz  $\sim 11$  magnitūdai, kas izrādījās nepietiekami, tika lejupielādēta un formatizēta NOMAD kataloga apakškopa deklināciju joslai  $57 \pm 2$  grādi, līdz 15 magnitūdai.

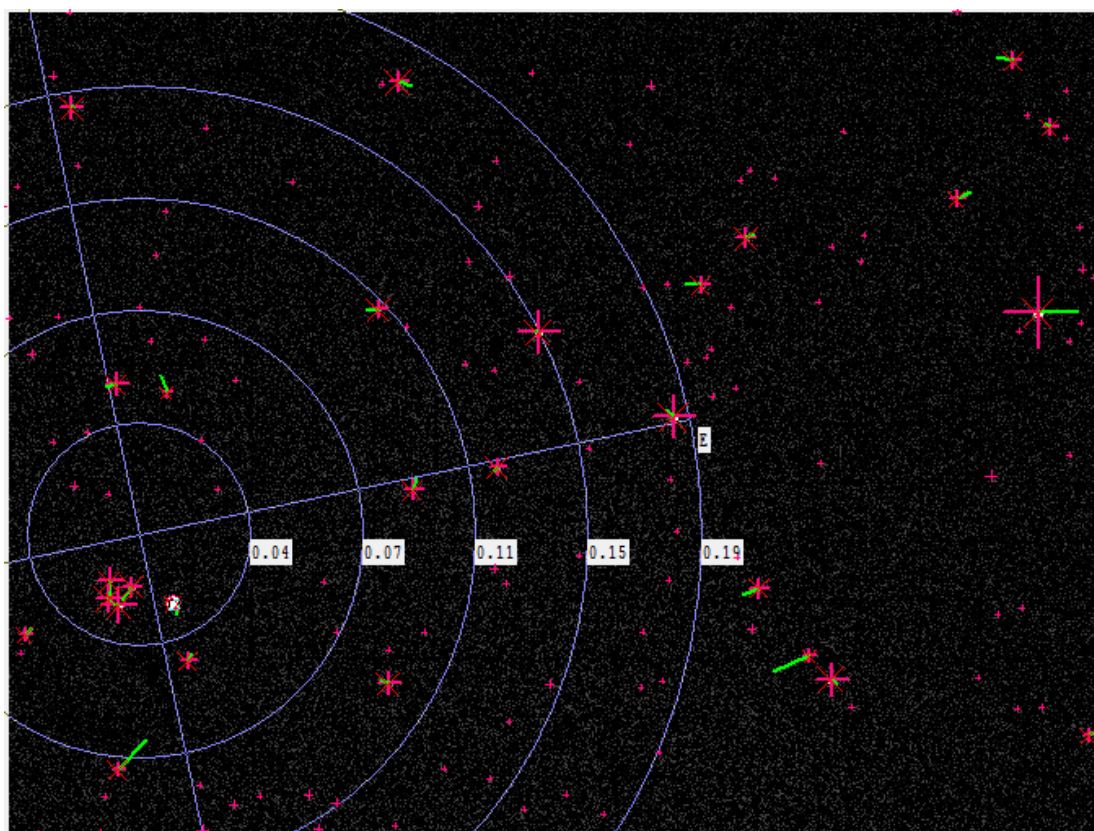
Iegūto datu apstrādes rezultāti liecina, ka sagaidāmā zenīta punkta pozīcijas novērtējuma precizitāte vienam kadram pie esošā aprīkojuma ir ne sliktāka par  $\sim 0.3''$ . Novērojumu apstrādes pieredze ļāva veikt virkni papildinājumu un uzlabojumu datu apstrādes programmatūrā, turpināt tās funkcionalitātes papildināšanu. Tāpat turpinās darbs pie attēla ekspozīcijas laika precīzas fiksācijas aprīkojuma, testiem tiek gatavots precīzais līmeņrādis.

Novērojumu seansu mērķis bija noskaidrot reģistrējamos attēlos redzamo apgabalu novietojumu attiecībā pret zenītu, novērojamo zvaigžņu raksturlielumus, ar reāliem datiem pārbaudīt zvaigžņu manuālas identifikācijas iespējamību un zenīta novietojuma aprēķina algoritma darbību.

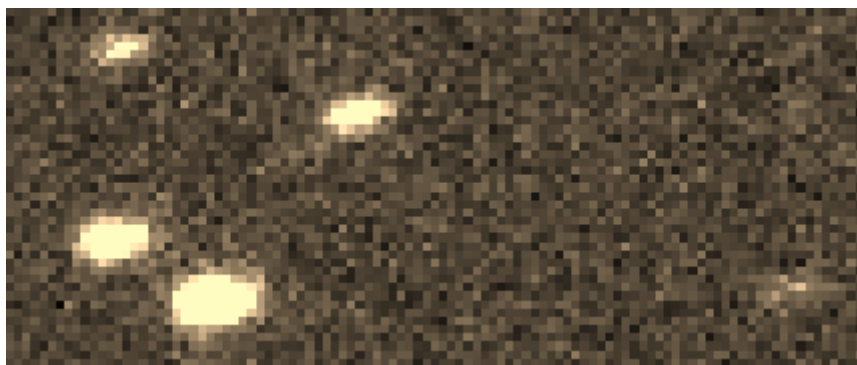
Novērojumu seansa 16.11.2011. ietvaros tika iegūti 40 kadri pie dažādiem instrumenta līmetņošanas iestatījumiem, pārvietojot redzes lauku Z-D virzienā par  $\sim \pm 2$  grādiem, orientācijas azimutu nemainot. Daļa kadru tika iegūti pie optimālajiem līmetņošanas iestādījumiem (vistuvāk zenītam). Ekspozīcija tika mainīta robežās no 0.1 līdz 0.5 sekundēm. Laiks tika reģistrēts manuāli, ar  $\pm 1..2$  sekunžu precizitāti. Attēlu kvalitāte bija apmierinoša, lai arī bija novērojami attēlu viļņošanās un drebēšanas efekti, kas bija gaisa konvekcijas un transporta izraisīto pamatnes vibrāciju sekas. Tika secināts, ka ir nepieciešama rūpīgāka instrumenta fokusēšana. Kadrā redzamo zvaigžņu skaits mainījās no 3 zvaigznēm tūlīt pēc saulrieta iegūtiem kadriem līdz  $\sim 20$  zvaigznēm tumšāka debess fona apstākļos iegūtajiem.



6.8.att. Testa novērojumu zvaigžņu lauka attēls



6.9.att. Kadra apstrāde; kadrs #15, iegūts 15:15:34, 16.11.2011.



6.10.att. Iegūto zvaigžņu attēlu magnitūda; augšā (no kreisās puses) - 10.03, 10.83, apakšā - 9.91, 9.27, 12.44

6.1. tabula

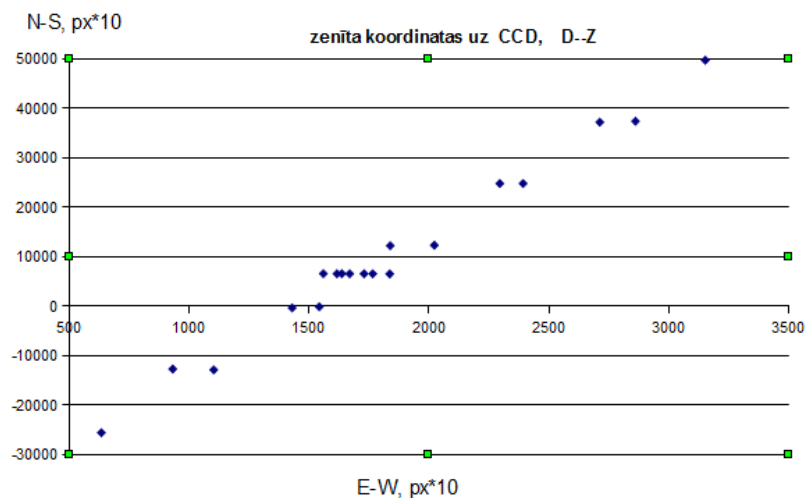
16.11.2011. seansa kadru zenīta novietojuma aprēķina rezultāti

| Laiks    | Zvaigžņu skaits attēlā | RMS, px | Zenīta projekcijas koordinātas uz matricas |            | Matricas Y ass azimuts $A_0$ , dg | Fokusa attālums, mm |
|----------|------------------------|---------|--|------------|-----------------------------------|---------------------|
|          |                        |         | $X_o$ , px                                 | $Y_o$ , px |                                   |                     |
| 14:58:53 | 11                     | 0.48    | 315.2                                      | 4968.6     | 168.275                           | 1392.54             |
| 14:59:13 | 17                     | 0.49    | 271.2                                      | 3716.5     | 168.256                           | 1392.87             |
| 15:02:50 | 9                      | 0.43    | 229.5                                      | 2478.1     | 168.213                           | 1393.45             |
| 15:03:16 | 7                      | 0.79    | 183.8                                      | 1218.2     | 168.24                            | 1392.56             |
| 15:03:40 | 9                      | 0.51    | 142.9                                      | -38.0      | 168.252                           | 1392.33             |
| 15:04:09 | 9                      | 0.69    | 110.2                                      | -1289.7    | 168.288                           | 1392.66             |
| 15:04:37 | 8                      | 0.53    | 63.3                                       | -2561.5    | 168.2                             | 1392.50             |
| 15:10:04 | 10                     | 0.28    | 93.1                                       | -1272.6    | 167.898                           | 1392.50             |
| 15:10:23 | 12                     | 0.39    | 154.2                                      | -15.3      | 167.895                           | 1393.22             |
| 15:10:42 | 5                      | 0.46    | 202.2                                      | 1228.2     | 167.94                            | 1392.76             |
| 15:11:07 | 12                     | 0.39    | 239.2                                      | 2475.4     | 169.91                            | 1392.99             |
| 15:11:26 | 11                     | 0.37    | 286.1                                      | 3736.5     | 167.91                            | 1392.71             |
| 15:14:34 | 10                     | 0.35    | 155.9                                      | 654.3      | 168.053                           | 1390.64             |
| 15:14:56 | 9                      | 0.38    | 166.9                                      | 652.3      | 168.04                            | 1393.27             |
| 15:15:34 | 11                     | 0.38    | 161.6                                      | 653.0      | 168.046                           | 1392.67             |
| 15:17:02 | 12                     | 0.38    | 172.9                                      | 651.2      | 168.056                           | 1393.60             |
| 15:17:48 | 10                     | 0.55    | 176.5                                      | 650.2      | 168.07                            | 1393.01             |
| 15:19:08 | 8                      | 0.33    | 163.6                                      | 654.2      | 168.07                            | 1393.13             |
| 15:21:09 | 3                      | 0.19    | 166.2                                      | 653.3      | 168.08                            | 1393.67             |

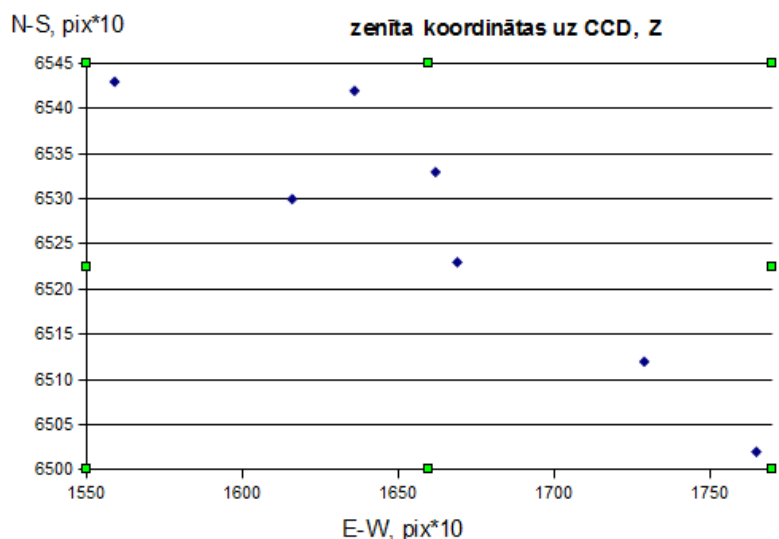
Identificējot iegūtos attēlus ar atbalsta kataloga zvaigznēm, tika konstatēts, ka optimālās līmetņošanas stāvoklis patiešām ir vistuvākais zenītam. Izdevās identificēt kadrus ar novirzi no zenīta līdz 1 grādam, tālāko identifikāciju neatļāva pārāk lielais no kataloga atlasāmo zvaigžņu skaits, ja lauka rādiuss pārsniedz vienu grādu. Kopā 16.11.2011. tika identificēti 19 kadri, to zenīta novietojuma aprēķina rezultāti parādīti 6.1. tabulā.

Iegūtie zenīta novietojumi uz matricas  $\{X_o, Y_o\}$ , kā jau bija sagaidāms, izvietojas tuvu

taisnei, kuras slīpumu pret matricas koordinātu asīm nosaka montāžas orientācija (~12 grādi no Z-D virziena):



6.11.att. Zenīta novietojumi uz matricas, iegūti 16.11.2011. seansa laikā



6.12.att. Zenīta novietojumi uz matricas (pietuvināts grafiks no 6.11. attēla)

Aplūkojot sīkāk zenīta novietojumu kadrus, kas uzņemti pie optimālas līmetņošanas (6.11. attēlā tie ir kompaktā grupā grafika vidusdaļā), redzams, ka tie izvietojas tuvu taisnei, izkliede A-R virzienā  $dX$  ir ap  $20''$ , kas atbilst laika reģistrācijas kļūdai (~2 sekundes), izkliede Z-D virzienā  $dY$  tuva  $4''$ , kas labi atbilst sakarībai  $dY = dX \operatorname{tg} 12^\circ$ , ko nosaka montāžas orientācija. Divi novērojumu punkti, kuri atrodas virs taisni veidojošajiem, ataino pēdējos divus kadrus, un ir iespējams, ka pirms to ekspozīcijas notikusi montāžas izkustēšanās par  $\sim 1''$ . Taisni veidojošo novērojumu izvietojums liecina, ka to eksponēšanas laikā montāžas pozīcija ir saglabājusies ar precizitāti, kas nav sliktāka par 1-2 loka sekundes desmitdaļām un varētu būt pietiekama.

Iegūto kadru apstrāde parāda, ka fiksējamais zvaigžņu lielums pie 0.1 s ekspozīcijas un labiem atmosfēras un sagaismojuma apstākļiem varētu sasniegt 13-14 magnitūdu. Tā kā izmantotajā Tycho-2 katalogā maksimālais zvaigžņu lielums ir tuvs 11, daudzas kadrā fiksētās zvaigznes katalogā nav atrodamas. Tādēļ nepieciešams izmantot apjomīgāku zvaigžņu katalogu.

Tika secināts, ka (pie nosacījuma, ja matricas pikseļu solis tiešām ir tāds, kā minēts matricas datos - 6.45 mikrometri) instrumenta fokusa attālums nedaudz atšķiras no projektētā - 1373 mm vietā  $1393 \pm 0.5$  mm. To varētu skaidrot arī ar no uzdotā atšķirīgu matricas soli - 6.54 mikrometri.

Nākošo novērojumu seansu mērķis bija iegūt reprezentatīvus datus par instrumenta orientācijas parametru atkarību no orientācijas azimuta, ar reāliem datiem pārbaudīt zvaigžņu attēlu prototipu iegūšanas, identifikācijas, zenīta punkta novietojuma aprēķina algoritmu darbību, novērtēt zenīta rotācijas modeļa parametru vērtības.

28.11.2011. seansa ietvaros tika iegūti 72 kadri, veicot divus pilnus montāžas apgriezienus un izpildot ekspozīciju ik pa  $\sim 10$  grādiem. Ekspozīcijas laiks bija 0.17 sekundes. Kā laika moments tika izmantots kadra faila izveidošanas moments, kas fiksēts faila atribūtos, tā precizitātes novērtējums  $\sim \pm 1$  sekunde. Attēlu kvalitāte bija līdzīga iepriekšējam seansam. Visi kadri tika manuāli identificēti un aprēķināts tiem atbilstošais zenīta novietojums uz matricas. Tika izmantota NOMAD atbalsta zvaigžņu kataloga apakškopa, kura satur zvaigznes līdz 15. lielumam.

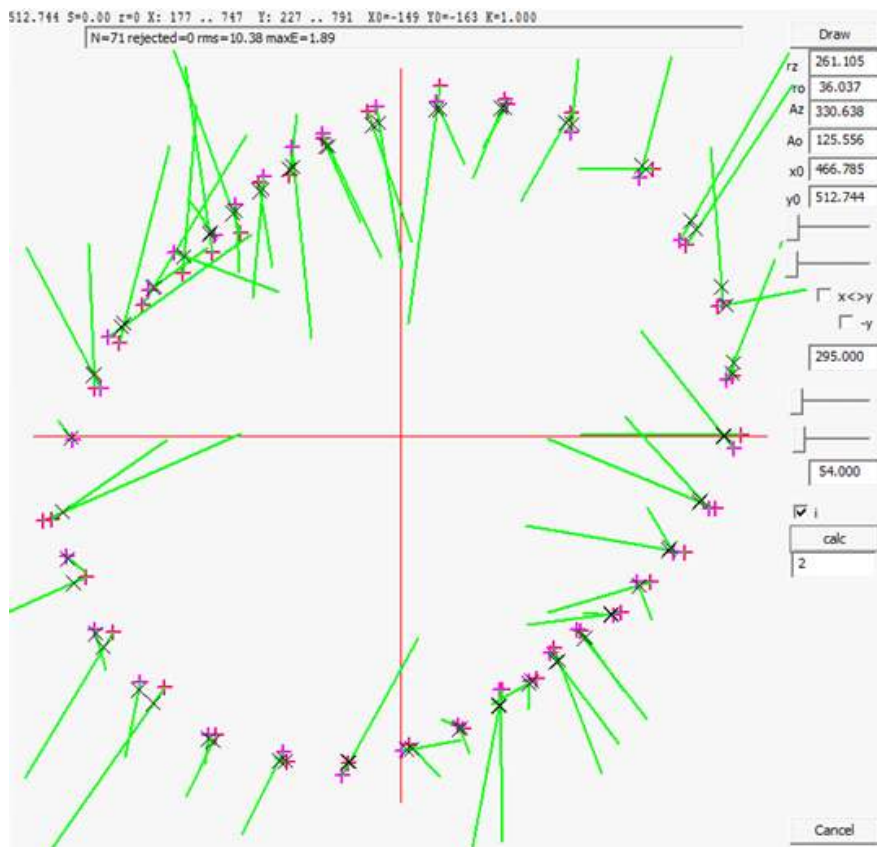
Apstrādes gaita parādīja, ka automātiskās attēlu prototipu veidošanas algoritms un modeļa aproksimācijas algoritms darbojas stabili. Atbalsta zvaigžņu skaits, izmantojot NOMAD katalogu, bija līdz 2x lielāks, nekā būtu iegūts, izmantojot Tycho-2, it īpaši pie tumša debess fona.

Iegūtie zenīta novietojumi izveido noslēgtu trajektoriju uz matricas, trajektorija laika reģistrācijas kļūdu ietvaros labi atkārtojas abos montāžas apgriezienos (6.13. attēlā - sarkanie un violette vertikālie krustiņi). Šādu zenīta trajektoriju var aprakstīt ar modeli (6.13. attēlā to reprezentē slīpie krustiņi):

$$\begin{aligned} x &= x_0 - (r_z \sin(A' + A_z) + r_o \sin(-A + A_o)); \\ y &= y_0 - (r_z \cos(A' + A_z) + r_o \cos(-A + A_o)), \end{aligned} \quad (6.20)$$

kur  $A' = A + dA \cos(2(A - A_o))$ ,  $tg\left(\frac{dA}{2}\right) = r_o/r_z$ .

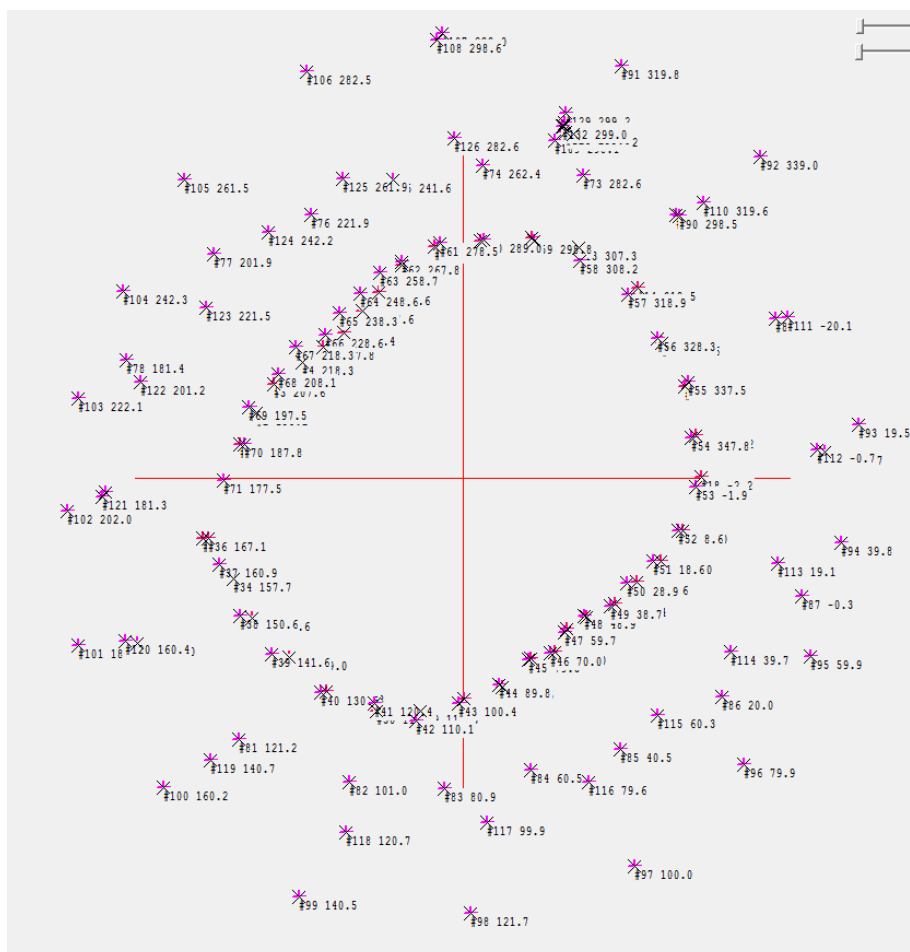
Parametri ir  $x_0 = 466.8$ ;  $y_0 = 512.7$ ;  $r_o = 36$ ;  $r_z = 261.1$ ;  $A_o = 125.6$ ;  $A_z = 330.6$ ;  $RMS = 10.4''$ .



6.13.att. 28.11.2011. seansa laikā iegūto zenīta punktu izvietojums uz matricas

To varētu interpretēt kā sekas optiskās ass nobīdei no rotācijas ass par  $\sim 36''$  un zenīta punkta nobīdei no rotācijas ass par  $\sim 261''$ . Tika secināts, ka jāveic papildu novērojumi pie dažādiem instrumenta līmetņojumiem un ar precīzāku laika momenta reģistrāciju.

Jāiegūst zvaigžņu lauka attēli, instrumentu griežot ap asi pie atšķirīgiem līmetņošanas iestādījumiem (rotācijas ass attāluma no zenīta), lai novērtētu zenīta attāluma iespaidu uz zenīta trajektorijas parametriem un iegūtu instrumenta kļūdu modeļa atbilstības novērtējumu. 27.12.2011. tika iegūti un apstrādāti 63 kadri pie 3 līmetņošanas stāvokļiem ar  $\sim 1'$  atšķirību. Līmetņošana tika mainīta, griežot viena statīva balsta skrūvi, kas nozīmē zenīta vietas nobīdi  $\sim 20$  grādu leņķī ar Z virzienu, līdz ar to nedaudz vajadzētu mainīties arī zenīta trajektorijas orientācijai. Mērījumu apstākļi bija vidēji (dūmaka, vējš), tāpēc zvaigžņu skaits kadros ir neliels (6-15), aproksimācijas vidējā kvadrātiskā kļūda bija ap  $1''$  (atsevišķiem kadriem līdz  $2''$ ). Tā kā laiks tika reģistrēts kā kadra faila izveidošanas laiks (ar precizitāti  $\pm \sim 2s$ ), kadru zenīta punktu kļūda ir tipiski līdz  $\sim 10''$ .



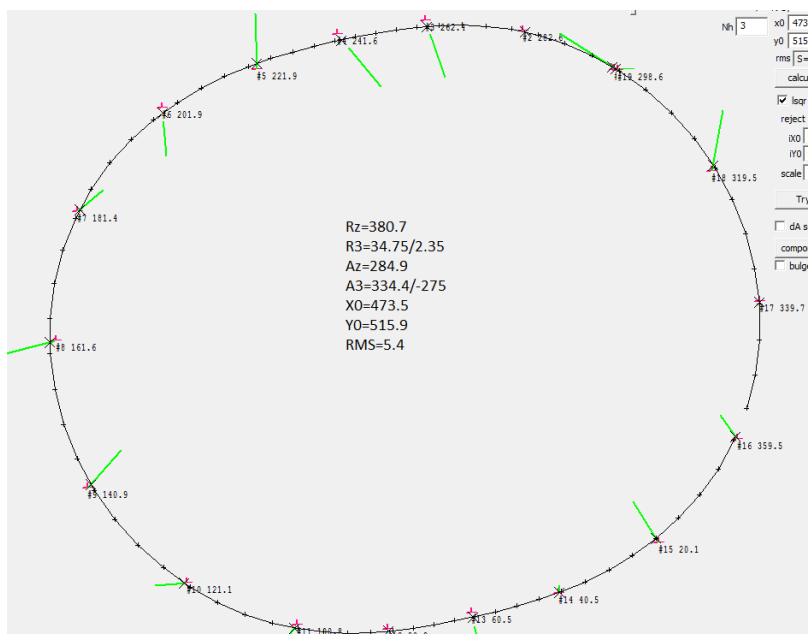
6.14.att. Kopējais zenīta punktu izvietojums pie atšķirīgiem līmetņošanas iestatījumiem (ietverot arī 28.11. seansa datus - centrā)

Izdalot atsevišķi līmetņošanas stāvokļiem atbilstošās novērojumu sērijas un aproksimējot tās ar instrumenta kļūdu modeli, izriet:

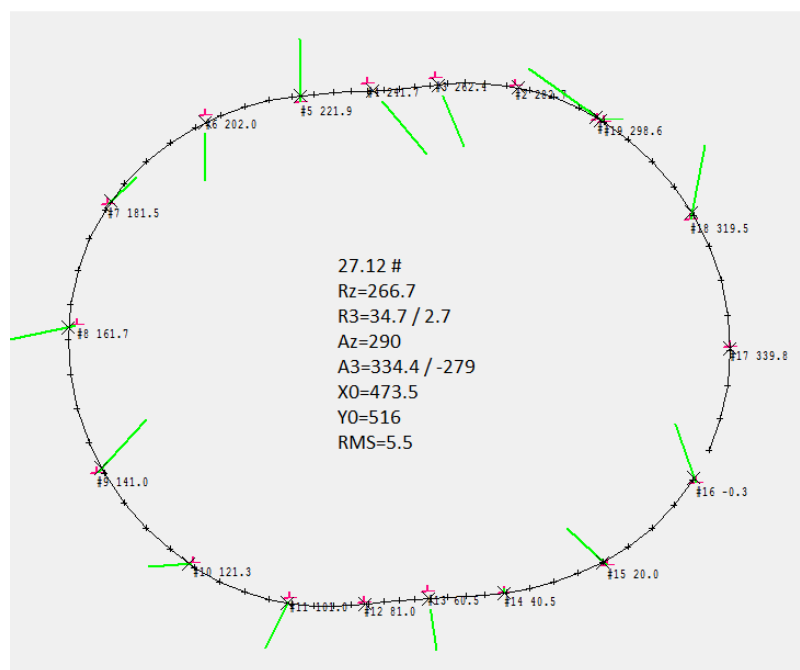
$$\begin{aligned} x &= x_0 - (r_z \sin(A + A_z) + r_3 \sin(3A + A_3) - r_{31} \sin(3A + A_{31})); \\ y &= y_0 - (r_z \cos(A + A_z) + r_3 \cos(3A + A_3) - r_{31} \cos(3A + A_{31})), \end{aligned} \quad (6.21)$$

kas reprezentē no kadra optiskā centra nobīdītu riņķi, kura rādiusu nosaka rotācijas ass attālums no zenīta un kas deformēts ar eliptisku azimuta 3. harmonijas funkciju. Pie trīs atšķirīgiem līmetņošanas iestatījumiem tika iegūti 6.15, 6.16 un 6.17 attēlos redzamie modeļi.

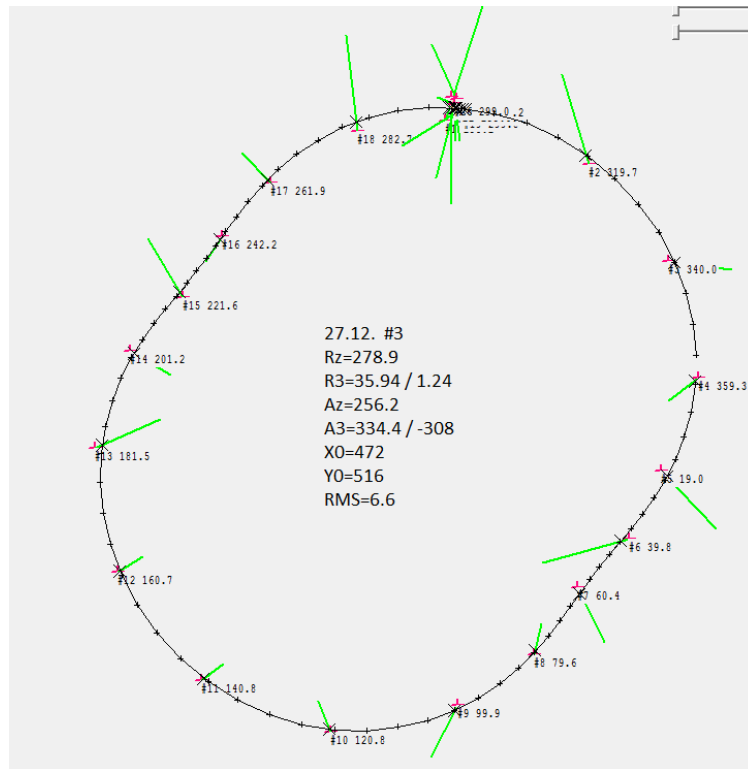




6.15.att. Instrumenta modelis pie 1. līmetņošanas iestatījuma

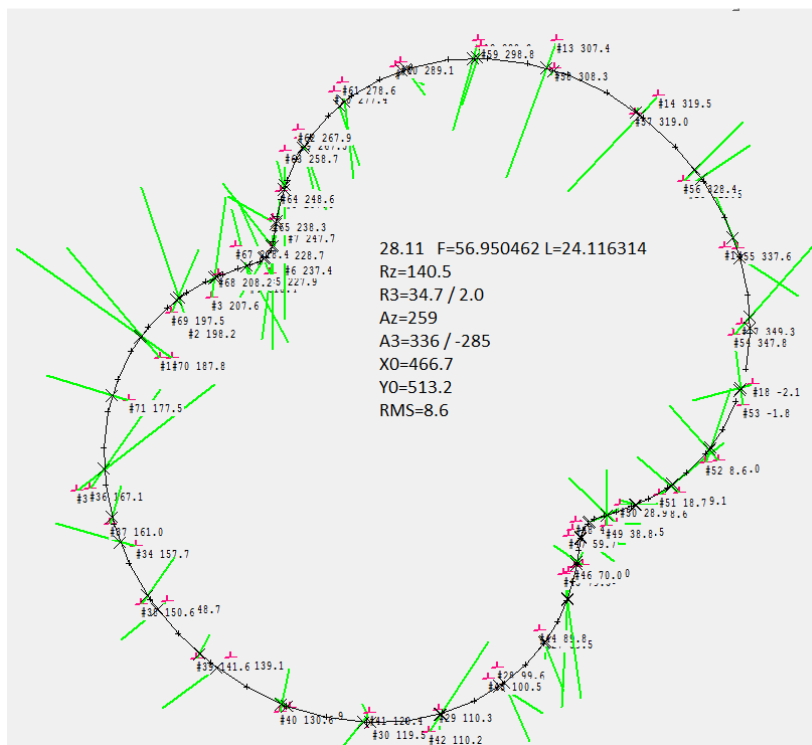


6.16.att. Instrumenta modelis pie 2. līmetņošanas iestatījuma



6.17.att. Instrumenta modelis pie 3. līmetņošanas iestatījuma

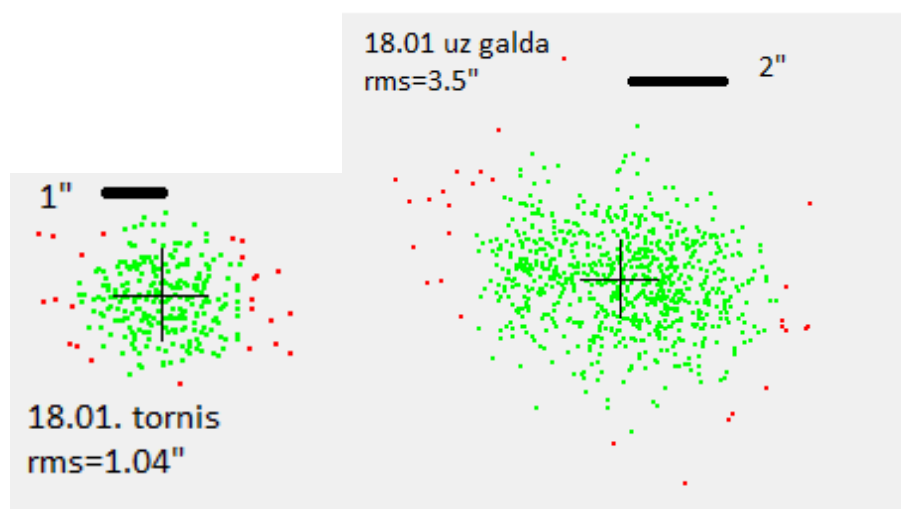
Pie tiem pašiem parametriem un modeļa tipa apstrādāti 28.11.2011. seansa rezultāti redzami 6.18. attēlā.



6.18.att. 28.11.2011. seansa instrumenta modelis, iegūts izmantojot 27.12.2011. seansa rezultātus

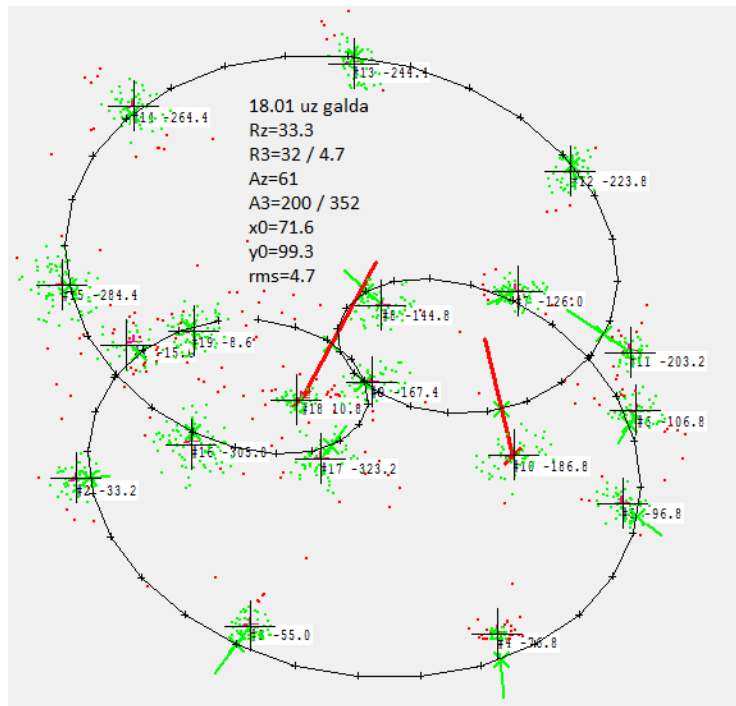
Kā redzams, atšķirīga līmetņošana izmaina zenīta trajektorijas izmērus ( $R_z$ ), nedaudz arī tās orientāciju ( $A_z$ ). 3. harmonijas deformācijas parametri ( $R_3, A_3$ ) paliek praktiski nemainīgi. Aprēķinot modeļa parametrus, tika atrasts, ka modelis ar diviem pretējās fāzēs esošiem 3. harmonijas locekļiem vislabāk apraksta mērījumu datus, tā vidējā kvadrātiskā kļūda bija 5" līdz 9" robežās. Šāda modeļa fizikālā interpretācija varētu būt montāžas pamatnes plaknes cilindriska deformācija ar amplitūdu ap 15 mikroniem un nevienmērību ap 2 mikroniem, kas attēlota kā zenīta pamatkustībai (nobīdīts riņķis) uzklāta 3-kārša elipse. Lai sīkāk izpētītu šo deformāciju struktūru, nepieciešami novērojumi ar lielāku precizitāti - vai nu precīzi reģistrējot kadra laiku, vai lietojot precīzo līmeņrādi.

Tālākais mērķis bija precīzā līmeņrāža darbības izmēģinājumi dažādos režīmos. 18.01.2012. instrumentam atrodoties uz galda, bija novērojamas svārstības ar vairāku loka sekunžu amplitūdu (RMS tipiski 3..4"), tās ievērojami pastiprinājās dažādu kustību apstākļos. Novietojot instrumenta uz stabilāka pamata, svārstību amplitūda vairākkārt samazinājās (RMS ap 1").



6.19.att. Instrumenta svārstību novērojumu izkliede uz galda (pa labi) un uz stabilāka pamata (pa kreisi)

Griežot instrumentu ap asi un veicot novērojumus ik pēc 20 grādu pagriezienu, tika iegūts 6.20. attēlā redzamais modelis.



6.20.att. Instrumenta modelis, iegūts griežot instrumentu ap asi 18.01.2012. seansa laikā

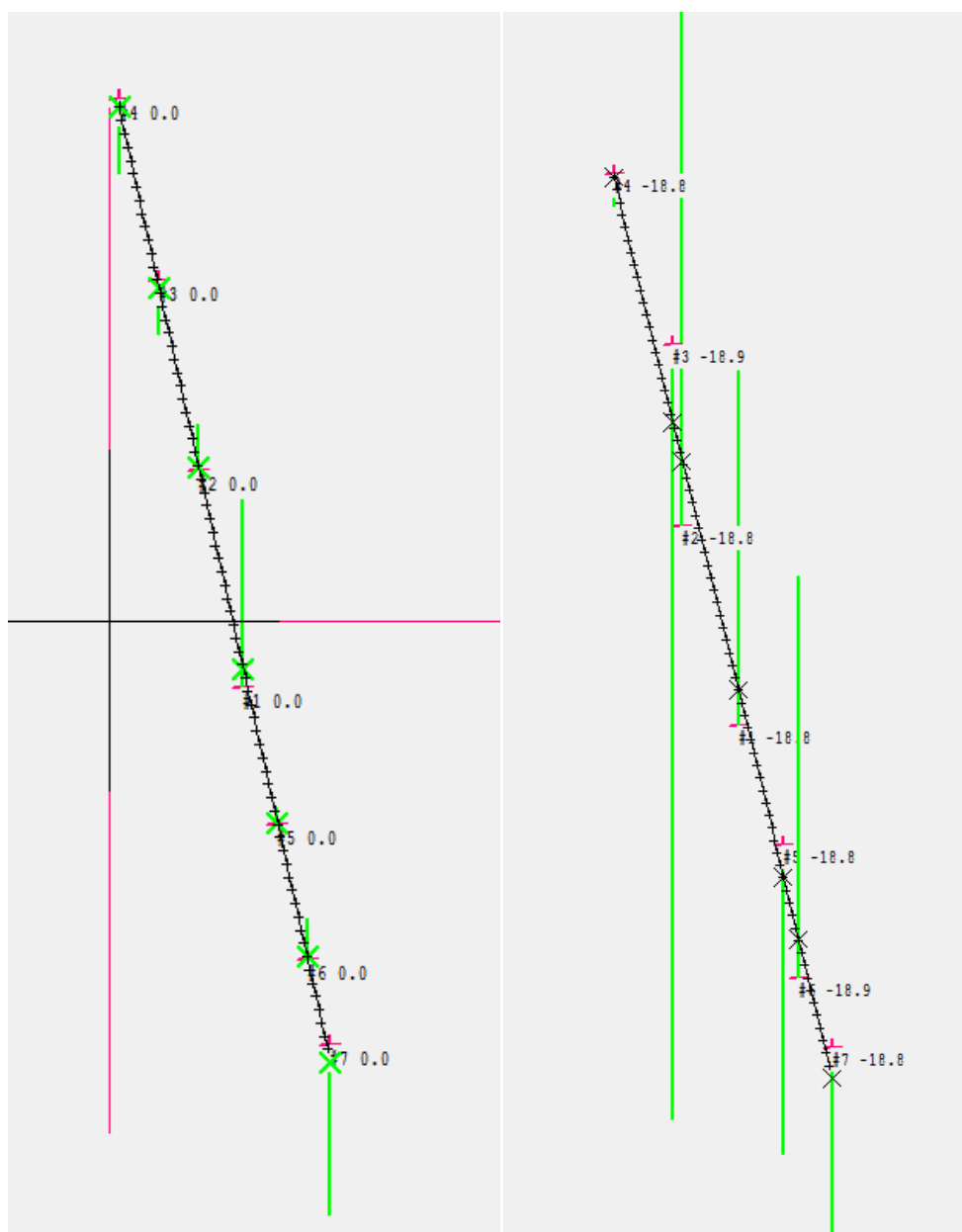
Šeit vienas zenīta pozīcijas kļūda ir 3-5". Azimuta nolasiņumu kļūda varētu būt vairāki grādi, tā daļēji kompensēta. Nav izslēgts zenīta stāvokļa dreifs seansa laikā telpas konstrukciju deformāciju dēļ.

Tika secināts, ka līmeņrāža novērojumos iegūtais instrumenta modelis visumā atbilst astrometriskajos novērojumos iegūtajam. Lai precīzāk novērtētu instrumenta parametrus, novērojumi jāveic uz stabilākas pamatnes, ar mazāku azimuta soli, izslēdzot iespējamo pamatnes un azimuta dreifu. Jāuzlabo līmeņrāža ass savietojums ar instrumenta rotācijas asi un rupjās līmetņošanas līmeņrāža regulējums.

Nepieciešams novērtēt līmeņrāža darbu arī āra apstākļos kopā ar astrometriskiem novērojumiem. 30.01.2012. instruments tika uzstādīts uz lāzera postamenta malas. Gaisa temperatūra bija ap -10, iespējams, šā iemesla dēļ sākotnēji bija problēmas ar attēla fokusēšanu, nācās ievērojami mainīt fokusa regulējumu. Iespējams, tas turpināja mainīties seansa laikā, tāpēc iegūto kadru kvalitāte ir visai viduvēja, zvaigžņu skaits tajos mazs, zenīta pozīcijas kļūda robežās no 0.5" līdz 2". Bez tam virknei kadru ekspozīcija bija par īsu un zvaigžņu attēli vispār nebija atrodami. Līmeņrāža mērījumu izkliede bija 1"..1.5" robežās, brīžiem bija jūtamas lielākas pamatnes vibrācijas.

Tika veikti novērojumi, lai novērtētu nobīdi starp CCD matricas un precīzā līmeņrāža ass virzieniem. Šai nolūkā tika uzņemta virkne kadru, instrumenta līmetņojumu mainot ar pamatnes skrūvi, iegūtajām zenīta pozīcijām vajadzētu veidot taisnes abās koordinātu sistēmās ar dažādiem slīpumiem pret XY asīm, kuru starpība atspoguļo šo asu savstarpējo nobīdi. Zenīta attāluma

izmaiņas diapazons pārstāvēja praktiski visu līmeņrāža diapazonu (y: -152" ... +124"; x: 3" ... 64"). Līmeņrāža zenīta trajektorija redzama 6.21. attēlā pa kreisi (XY izmaiņu diapazons 280"; aproksimācijas ar taisni RMS 3"; leņķis 77.50 grādi, tā kļūdas novērtējums ~10' ).



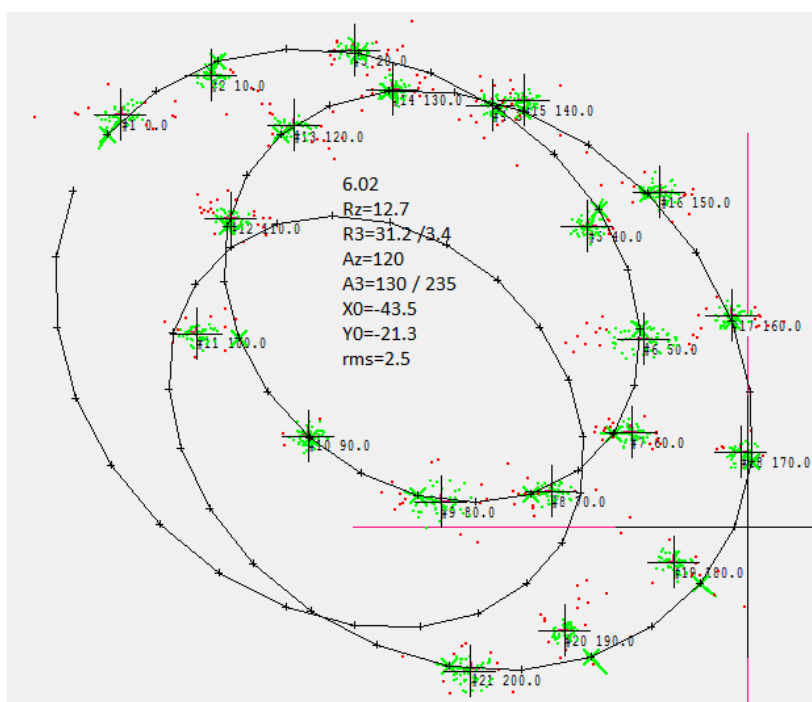
6.21.att. Līmeņrāža zenīta trajektorija (pa kreisi), astronomiskā zenīta trajektorija (pa labi)

Astronomiskā zenīta trajektorija redzama 6.21. attēlā pa labi (aproksimācijas RMS=15"; leņķis 76.54 grādi; tā kļūdas novērtējums ~1 grāds).mStarpība starp abiem virzieniem ir 0.97 grādi, novērtējuma kļūda ir ap vienu grādu, kļūdas iemesls pamatā ir astrometriskā zenīta pozīciju kļūda neprecīzo laika momentu dēļ. Novērtējuma precizitāte sasniedz dažas loka minūtes. Sakarā ar vāji noklātu mērījumu diapazonu modeļu parametru novērtējumam iespējamās lielas kļūdas. Seansa gaitā tika fiksēti gadījumi, kad instruments izkustējies, domājams, pārāk cietu komunikāciju vadu

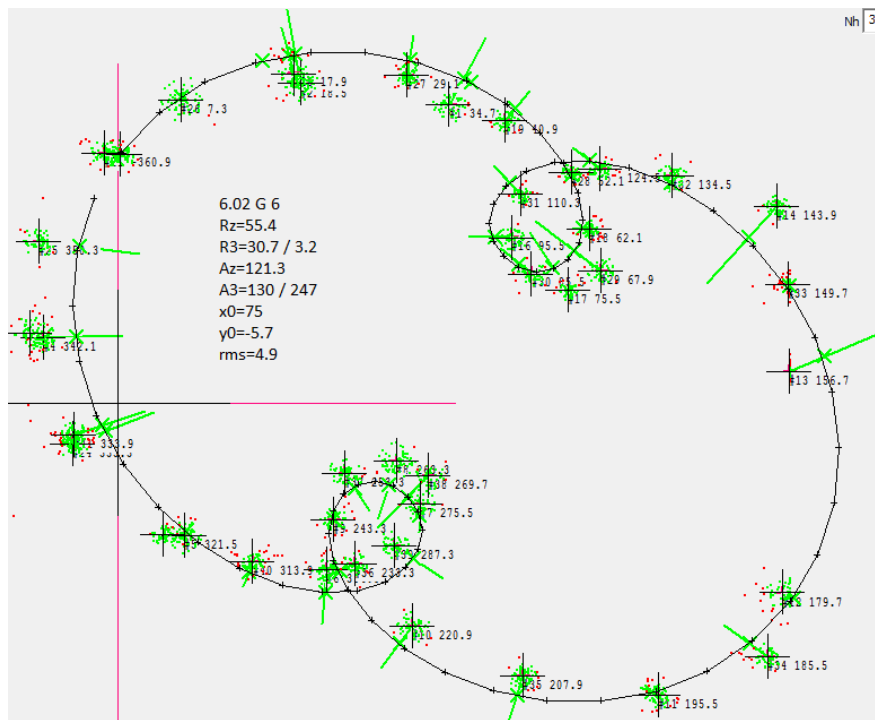
un/vai slidenas pamatnes dēļ. Nepieciešams seansu atkārtot pie labāka fokusējuma un stabilāka instrumenta novietojuma. Jārisina jautājums par bezvadu komunikācijām starp vadības datoru un instrumentu.

Lai iegūtu līmeņrāža novērojumus pie precīzākas rupjās līmetņošanas, jāuzlabo rupjā līmeņrāža regulējumu un precīzāk jāsavieto rotācijas un līmeņrāža ass. 06.02.2012. tika izpildīti novērojumi, instrumentam esot uz galda, līdz ar to pamatnes vibrāciju dēļ iegūto pozīciju RMS sasniedza 3-5". Tika izpildītas vairākas mērījumu virknes pie dažādiem asu regulējumiem. Izdevās panākt rotācijas ass tuvumu zenītam līdz dažām loka sekundēm, taču ir skaidrs, ka precīzākai regulēšanai nepieciešams elektroniski nolasāms rupjais līmeņrādis ar ievērojami labāku jutību un precizitāti nekā esošajam burbuļa līmeņrādim (principā var izmantot precīzo līmeņrādi) un tāl vadības aktuatori balstu regulēšanai.

Divi no iegūtajiem instrumenta modeļiem redzami 6.22. un 6.23. attēlos.



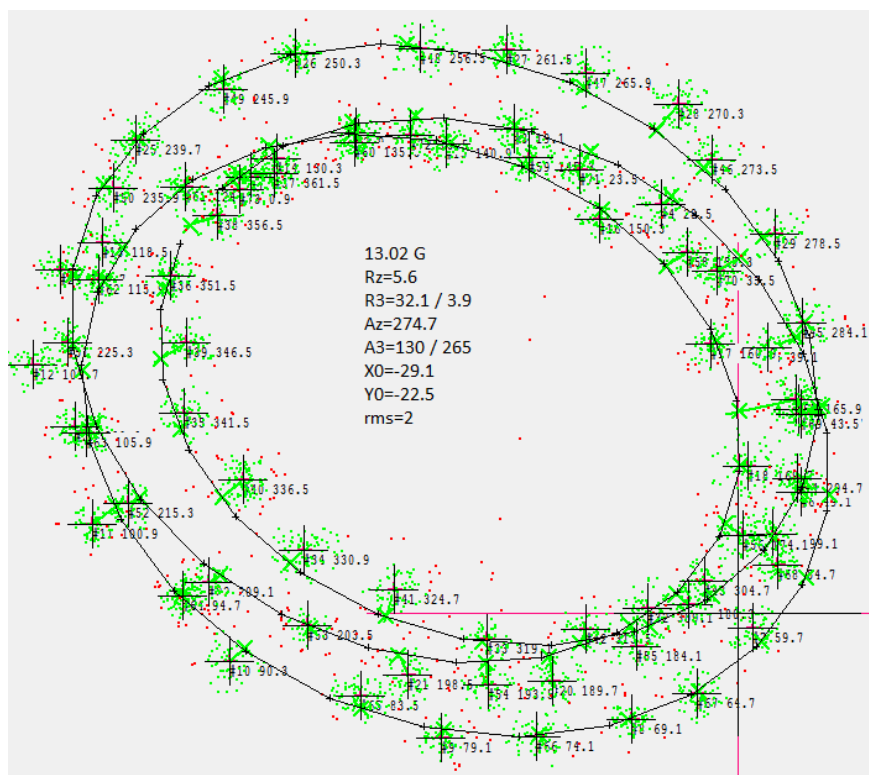
6.22.att. Instrumenta modelis pie 1. asu regulējuma



6.23.att. Instrumenta modelis pie 4. asu regulējuma

Redzams, ka iegūtie montāžas pamatplaknes deformāciju parametri R3/A3 visās mērījumu virknēs ir tuvi un labi saglabājuši iepriekšējos seansos atrastās vērtības.

Tālākais mērķis bija novērtēt lāzera plauktu kā stabilāku pamatni telpās izpildāmiem līmeņrāža mērījumiem un novērtēt pēc modeļa kompensācijas paliekošo aproksimācijas nesaistes lielumu un īpašības. 13.02.2012. tika konstatēts, ka mērījumu izkliede uz plaukta ir 1" ..1.6" robežās, kas ir ievērojami labāk nekā uz galda, taču sliktāk nekā uz postamenta. Mērījumi tika izdarīti divos instrumenta apgriezienos (turp un atpakaļ), turp - ar 10 grādu soli, bet atpakaļ - ar 5 grādu soli. Instrumenta modelis, izpildot mērījumus uz stabila pamata, redzams 6.24. attēlā.



6.24.att. Instrumenta modelis, izpildot mērijumus uz stabila pamata 13.02.2013. seansa laikā

Pēc eliptiskās komponentes kompensācijas tomēr palikusi ievērojama sistemātiska nesaistes komponente, kura praktiski neaproximējas arī ar augstākām A harmonijas koeficientu vērtībām (vismaz līdz 16). Domājams, ka šo nesaistes daļu nosaka galvenokārt neregulāras pamatplaknes deformācijas ar 1-2 mikronu amplitūdu. Iespējama arī putekļu daļiņu vai citādu svešķermeņu ietekme. Acīmredzot būtu lietderīga pamatplaknes papildus slīpēšana un gultņu tīrīšana. Jāapsver arī precīzāku gultņu sagādes iespējas. Lai sīkāk novērtētu nesaistes struktūru un patstāvību, vēlams atkārtot novērojumus, izpildot nolasījumus ik pēc 5 grādiem, un uz stabilākas pamatnes.

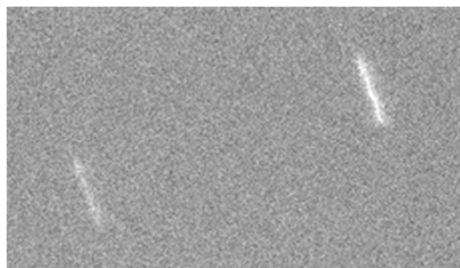
20.02.2012. seansa mērķis bija novērtēt vides temperatūras ietekmi uz fokusēšanas sistēmu un iegūt abu apakšsistēmu novērojumu komplektu pilnam instrumenta apgriezienam, kas ļautu novērtēt instrumenta sistēmu darbību reāliem novērojumiem tuvos apstākļos un abu zenīta punktu savstarpējā novietojuma aprēķina algoritmu. Paredzamā rezultāta precizitāte bija ne labāka par dažām loka sekundēm, jo kadra laika reģistrācija joprojām ierobežota ar faila izveidošanas laiku (+/-2 sekundes no ekspozīcijas laika).

Tika uzņemti zvaigžņu lauka kadri pie dažādām fokusēšanas mikrometra pozīcijām (ar soli 2 iedaļas) un ekspozīciju 4 sekundes, iegūstot zvaigžņu attēlus kā svītras, kā arī izpildīti zvaigžņu un līmeņrāža novērojumi pilnā instrumenta apgriezienā ar 10 grādu soli. Gaisa temperatūra bija tuva 0, neliela dūmaka. Instruments tika novietots uz lāzera postamenta malas, to izdevās



noļīmetnot ar  $\sim 1'$  precizitāti.

Fokusēšanas attēli rāda, ka iepriekšējā seansa (kad gaisa temperatūra bija  $\sim -10^{\circ}\text{C}$ ) iestādījumi jāmaina par vairākām iedaļām. Aptuveni optimāls fokusējums redzams 6.25. attēlā.

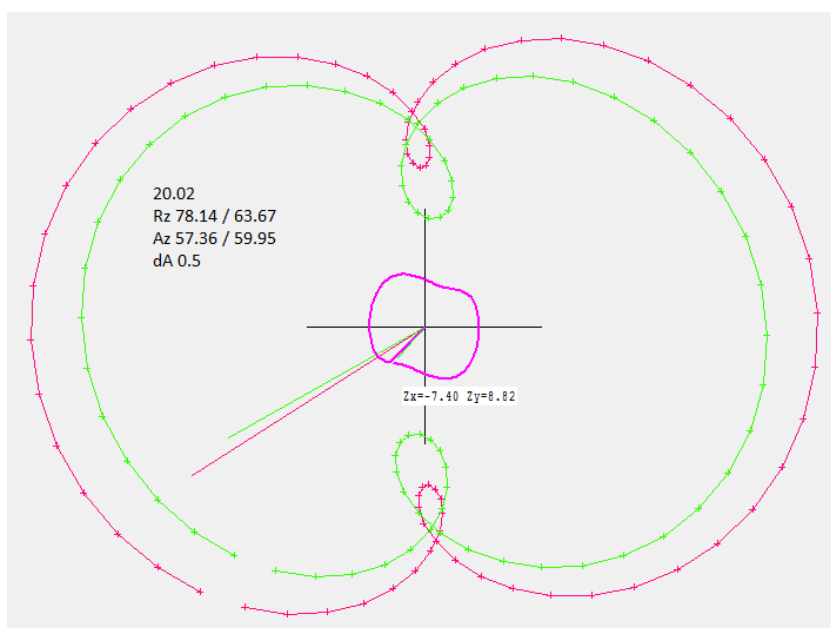


6.25.att. Optimāls fokusējums 20.02.2012. seansa laikā

Astrometrisko kadru kvalitāte bija viduvēja - daudz drebēšanas vai konvekcijas deformāciju (novērojama korelācija starp RMS un īpaši sliktiem zvaigžņu attēliem), kopumā mazs zvaigžņu skaits: 3 .. 12. Astrometrisko kadru aproksimācijas vidējā kvadrātiskā nesaiste bija  $0.2''$  ..  $2''$ .

Līmeņrāža mērījumi ir neviendabīgi - pozīcijas vidējā kvadrātiskā nesaiste mainījās no  $0.7''$  līdz  $2.5''$ , domājams, atkarībā no ēkas vibrāciju līmeņa, kas varētu būt saistīts ar garāmbraucošo transportu. Pēdējās divās pozīcijās, domājams, instruments par dažām sekundēm nobīdījies, kas varētu būt sekas līmeņrāža kabeļa saskarei ar lāzera konstrukciju.

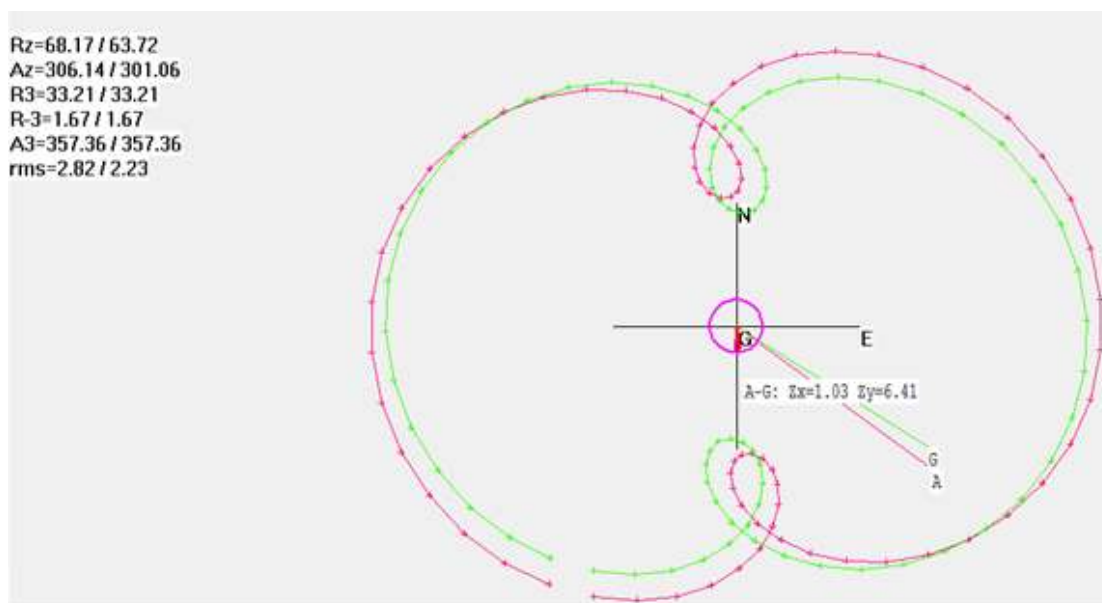
Savietojot abus modeļus (t.i., to rotācijas asis projicējot koordinātu sākumpunktā) un aprēķinot to starpību, tika iegūts 6.26. attēls.



6.26.att. Astrometriskās un gravimetriskās apakšsistēmas savietošana pēc 20.02.2012. seansa datiem

Abu zenītu savstarpējā nobīde (ko ilustrē divi no centra novilkto vektori) ir ap 10", taču šīs vērtības kļūdas novērtējums ir ne mazāks par 6", galvenokārt kadru laika neprecizitātes dēļ. Taču kopumā iegūtais rezultāts ir ar gaidīto lieluma kārtu. Trajektorija attēla centrā ir starpība ( $dX, dY$ ) starp abiem modeļiem, ideālā gadījumā tai vajadzētu būt aplim, kura rādiuss ir anomālijas modulis. Atšķirības no apļa, nosaka astrometriskā modeļa neprecizitāte.

Datu apstrādes gaitā tika konstatēts, ka instrumenta modelim jāmaina x koordinātas un azimuta zīme, rezultātā mainās arī asu virziena interpretācija. Ar laboto modeli iegūtie rezultāti labāk atbilst sagaidāmajiem. Ja abu apakšsistēmu novērojumus lieto kopā, pieņemot, ka deformāciju modelis tām identisks, tiek iegūts 6.27. attēlā redzamais rezultāts (laboti kadru laiku momenti līdz veselai sekundeij, kas dod nesaistes minimumu). Tas ir pirmais reālais zenīta novirzes novērtējums. Tomēr kļūdas novērtējums vēl ir vairākas loka sekundes.



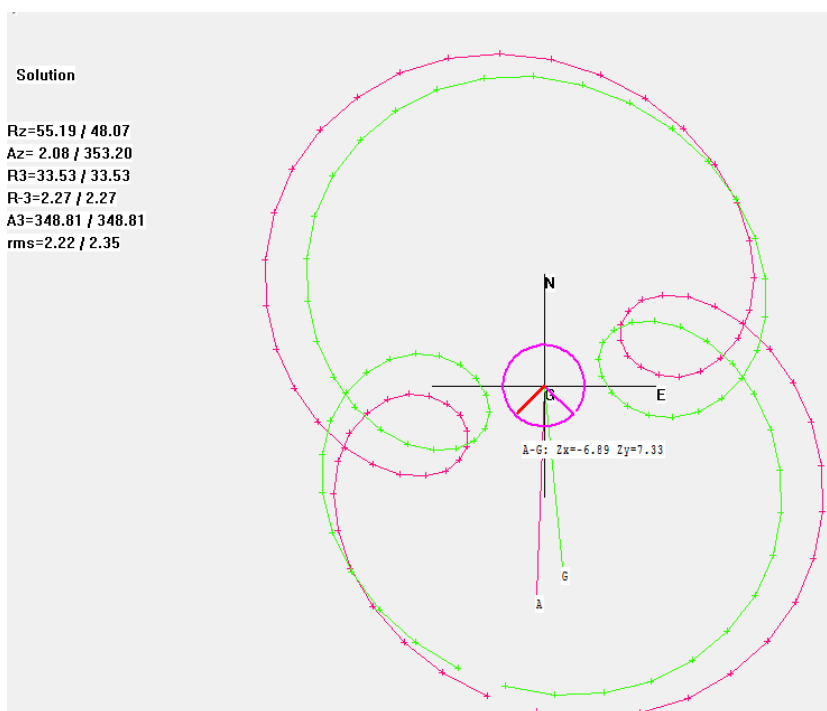
6.27.att. Astrometriskās un gravimetriskās apakšsistēmas savietošana pēc 20.02.2012. seansa datiem, pieņemot, ka deformāciju modelis ir identisks

Nepieciešams pārbaudīt tiešas attēlu reģistrēšanas shēmu, novērtēt sistēmas raksturlielumus reāliem novērojumiem tuvos apstākļos. 13.03.2012. attēli tika reģistrēti ar autonomu programmu, kas ļauj fiksēt ekspozīcijas pieprasījuma laiku ar datora tika (~15 ms) precizitāti. Diemžēl laika apstākļi bija nelabvēlīgi - stiprs, brāzmains vējš, kas izraisīja ievērojamu instrumenta drebēšanu, atsevišķu kadru līmeņrāža RMS sasniedza 3", bija grūtības savākt pietiekamu skaitu līmeņrāža nolasījumu, kuri izpildītu sērijas stabilitātes kritēriju (pēdējo 5 nolasījumu RMS<12"). Domājams, vēja dēļ seansa vidū notika instrumenta ass nobīde par ~1", kas

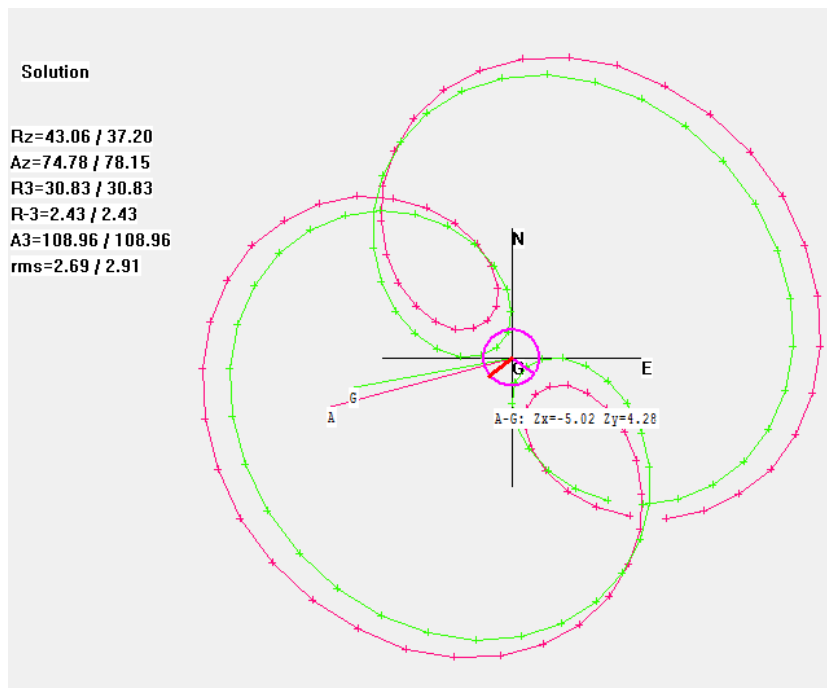
tika konstatēta tikai datu pēcapstrādes procesā. Rezultātā iegūto kadru virkne sašķēlās divās virknēs, kas katra reprezentēja apmēram pusi apgrieziena. Bez tam, tuvojoties zvaigžņu blīvuma minimumam, kadrā fiksēto zvaigžņu skaits bija mazs (līdz 10, vidēji ap 5, bet atsevišķos kadrus varēja atrast tikai 1-2 zvaigznes, kas spožākas par 12 magnitūdu). Līdz ar to iegūtie zenīta nobīdes rezultāti neattiecas uz pilnu novērojumu seansu, bet gan uz diviem nekompensētiem pusapgriezieniem, un atspoguļo instrumenta pamatplaknes asimetrijas īpašības.

Attēlu reģistrācijas sistēma kopumā darbojās kā paredzēts, taču ekspozīcijas ilgums maināms tikai pārstartējot sistēmu, un kadra pikseļu intensitātes normalizācijas algoritms nav optimāls zvaigžņu attēliem un ir jāpilnveido, nošķeļot sadalījuma mazās intensitātes pusi un paplašinot lielās intensitātes daļu. Bez tam, jānošķeļ neizmantotās pikseļu rindas kadra malās.

Aproximācijas vidējā kvadrātiska kļūda ir  $\sim 3''$  bez kadru laika koriģēšanas, tas varētu liecināt, ka laika kļūda nepārsniedz dažas sekundes desmitdaļas, un galvenais kļūdu avots ir montāžas pamatplaknes mehāniskās deformācijas. Aproximācijas RMS visai līdzīgs abām apakšsistēmām, arī kļūdu korelācija ir liela. Divi iegūtie modeļi, visus datus apstrādājot kopā, redzami 6.28. un 6.29. attēlos.



6.28.att. Astrometriskās un gravimetriskās apakšsistēmas savietošana pēc 13.03.2012.pirmās seansa puses datiem



6.29.att. Astrometriskās un gravimetriskās apakšsistēmas savietošana pēc 13.03.2012.otrās seansa puses datiem

Redzams, ka starp abām sērijām notikusi ievērojama zenīta nobīde. Zenīta novietojumu novērtējums atšķiras, domājams, nesimetriska novērojumu izvietojuma instrumenta apgrieziena dēļ, katra sērija reprezentē savu pamatplaknes iecirkni.

Tika secināts, ka jāmēģina instrumenta pamatplakne pārslīpēt un, izmantojot iespēju, jāintegrē konstrukcijā soļu motors instrumenta griešanai, bezvadu komunikāciju ierīces, jāmaina CCD matricas centrējums.

## SECINĀJUMI

Promocijas darbā ir sniegti zinātnisko pētījumu rezultāti par Latvijas nacionālā ģeoīda modeļa augstas precizitātes sasniegšanas iespējām, izmantojot dažādas starptautiski atzītas metodes un programmatūras un, kā arī, izvērtējot esošās datu kopas gan visā Latvijas Republikas teritorijā, gan eksperimentālā apgabalā – Rīgas reģionā.

Lietojot KTH metodi gravimetriskā ģeoīda aprēķiniem visai Latvijas teritorijai, sākotnēji izmantojot PSRS laika digitizētos brīvā gaisa anomāliju un EGM2008 globālā Zemes gravitācijas lauka modeļa datus, neizdevās sasniegt labāku rezultātu kā ar vidējo kvadrātisko kļūdu 22.5 cm. Izmantojot Latvijas Ģeotelpiskās informācijas aģentūras jaunākos gravimetrisko mērījumu datus Rīgas reģionam un EGM2008 datus, rezultātā iegūtais Rīgas reģiona ģeoīda modelis ir ar labāku precizitātes rādītāju, pēc GNSS/nivelēšanas punktu datiem vidējā kvadrātiskā kļūda ir 7.5 cm. Izmantojot šos jaunākos gravimetrisko mērījumu datus un 2013.gada sākumā publicētā GOCE satelīta GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R4 Zemes gravitācijas lauka modeļa datus, Rīgas reģiona ģeoīda modeļa vidējā kvadrātiskā kļūda ir 5 cm pēc GNSS/nivelēšanas punktu datiem. Tātad Rīgas reģionā Goce GO\_CONS\_GCF\_2\_DIR\_R4 modeļa atbilstība ir labāka, nekā EGM2008 modelim. Jāsecina, ka vēsturisko gravimetrisko datu kvalitāte nedod iespēju aprēķināt augstas kvalitātes ģeoīdu, bet LGIA uzkrāto reālo gravimetrisko mērījumu blīvums Latvijā vēl nav pietiekošs.

DFHRS aprēķinu metode ģeoīda aprēķinam Latvijas teritorijā, pamatojoties uz GNSS/nivelēšanas datu kopu un EGG97 gravimetriskā ģeoīda modeļa datiem, ir vissekmīgākā. Rezultātā Latvijas Republikas teritorijai iegūts ģeoīda modelis ar 1.6 cm vidējo kvadrātisko kļūdu (pēc GNSS/nivelēšanas punktu datiem). Lietojot pašreiz Latvijā esošās datu kopas, DFHRS metode dod labākos rezultātus. Paplašinot DGNSS mērījumu piesaisti visam 1.klases nivelēšanas tīklam, rodas reālas iespējas vēl uzlabot Latvijas ģeoīda modeļa precizitāti.

Salīdzinot piecus globālos Zemes gravitācijas lauka modeļus – EGM2008, EGG97, Eigen05c, Eigen06c, GO\_CONS\_GFC\_2\_DIR\_R3, kuri transformēti, lai pielāgotu Latvijas augstumu sistēmai, ar pašreiz lietošanā esošo Latvijas gravimetrisko ģeoīda modeli LV'98 un GNSS/nivelēšanas punktu datiem, var secināt, ka vislabākā atbilstība ir EGM2008 un EGG97 modeļiem, savukārt vissliktākā atbilstība ir Eigen05c un GO\_CONS\_GFC\_2\_DIR\_R3 modeļiem, jo tie balstās tikai uz satelītu mērījumu rezultātiem un to izšķirtspēja nav mazāka par 100km<sup>2</sup>.

Vertikāles novirzes no globālajiem Zemes gravitācijas lauka modeļiem (Molodenska vertikāles novirzes) Baltijas valstu reģionā mainās apmēram no -2 līdz +5 loka sekundēm. Korekcijas Molodenska vertikāles noviržu pārrēķinam uz astroģeodēziskajām vertikāles novirzēm uz elipsoīda ir normālās svērtēniskās līnijas korekcija, kas Baltijas valstu reģionā mainās no -0.02

līdz +0.04 loka sekundēm, un elipsoidālā korekcija, kas Baltijas valstu reģionā mainās no -0.04 līdz +0.03 loka sekundēm.

Astroģeodēziskās metodes dod iespēju noteikt vertikāles novirzes, kuras var integrēt Latvijas ģeoīda noteikšanā. Lai izveidotu Latvijas ģeoīdu ar 1-2 cm precizitāti, ir nepieciešami aptuveni 2000 astroģeodēzisko punktu mērījumi, savukārt šādas precizitātes gravimetriskā ģeoīda noteikšanai nepieciešami vismaz 64 500 gravimetrisko punktu mērījumi.

Latvijā uzsākta digitālā zenītteleskopa prototipa izstrāde un veikti testa mērījumi. Attēli, iegūti ar prototipa instrumentu pilsētas centra vidē, parāda zvaigznes līdz 13<sup>m</sup> magnitūdai pie 0.1 sekundes ekspozīcijas. Vidējais zvaigžņu skaits kadrā ir 12. Iegūto zvaigžņu attēlu laika noteikšanas precizitāte iekļaujas 10 milisekunžu robežās. Precīzā līmeņrāža nepārtrauktu nolasījumu virknes RMS mainās no 2-3 loka sekundēm iekštelpās līdz 0.2-1 loka sekundēm uz stabilas pamatnes pilsētā, tāpēc mērījumu iegūšanai jānotiek vietās ar minimālu fona vibrāciju ietekmi. Instrumenta pamatnes stabilitātes un rotācijas mehānisma precizitātes prasības nav pārāk stingras, ir pietiekoši, ja instrumentam ir laba stabilitāte 10-20 sekunžu laikā, kad tiek veikta attēlu iegūšana. Rezultātā secināts, ka ar digitālā zenītteleskopa gala konstrukciju noteikto vertikāles noviržu sagaidāmā precizitāte būs labāka par 0.1 loka sekundi. Latvijas ģeoīda modeļa precizitātes uzlabošanai ar astroģeodēzisko metodi pirmo reizi tiks izmantoti digitālā zenītteleskopa vertikāles noviržu mērījumu dati. Šie dati tiks lietoti, līdzko tiks iegūts minimāls digitālā zenītteleskopa mērījumu datu daudzums. Šīs jaunākās metodes agrākos Latvijas ģeoīda modeļa aprēķinos nav izmantotas.

Aprēķināta digitālā zenītteleskopa optiskā sistēma, patentēšanai iesniegts un LR Patentu valdē pieņemts patenta pieteikums par šo digitālā zenītteleskopa optisko sistēmu „Katadioptriska optiska sistēma ar difrakcijas izšķiršanas spēju pa visu redzeslauku”.

## IZMANTOTĀS LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Abdalla A., Tenzer R. The evaluation of the New Zealand's geoid model using the KTH method// *Geodesy and Cartography*. – 2010. - Volume 37, Issue 1. – p. 5-14.
2. Abele M., Balodis J., Janpaule I., Lasmane I., Rubans A., Zariņš A. Digital Zenith Camera for Vertical Deflection Determination// *Geodesy and Cartography*. – 2012. - Volume 38, Issue 4. – p. 123-129.
3. Agren J. Regional Geoid Determination Methods for the Era of Satellite Gravimetry Numerical Investigations Using Synthetic Earth Gravity Models// *Doctoral Dissertation in Geodesy*. Stocholm: Royal Institute of Technology (KTH), Department of Infrastructure, 2004. - 246 p.
4. Aleksejenko I., Sakne J., Kalinka M., Reiniks M., Kalantaite A., Krikstaponis B., Parseliunas E.K., Petroskevicius P., Viskontas P. The united geodetic vertical network of Latvia and Lithuania// *Geodesy and Cartography*. – 2012. - Volume 38, Issue 1. – p. 9-19.
5. Balodis J., Balodis K., Janpaule I., Kaminskis J., Normand M., Mitrofanovs I., Plotnikovs S., Rubans A., Silabriedis G., Zvirgzds J. On road of “EUPOS<sup>®</sup> Contribution to GOCE Mission“// *Proceedings of International Symposium on Global Navigation Satellite Systems, Space-Based and Ground-Based Augmentation Systems and Applications*. - Berlin: Senate Department for Urban Development, 2010. -p. 47-50.
6. Birardi G. (1976). The establishment of a net of vertical deflection points in Italy by means of a photoastronomic procedure. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini* 2. Firenze: Istituto Geografico Militare, 1975.
7. Bruinsma S.L., Lemoine J.M., Biancale R., Vales N. CNES/GRGS 10-day gravity field models (release 2) and their evaluation// *Advances in Space Research*. – 2010. - Volume 45, Issue 4. – p. 587-601.
8. Bruinsma S.L., Marty J.C., Balmino G., Biancale R., Foerste C., Abrikosov O. and Neumayer H, 2010, GOCE Gravity Field Recovery by Means of the Direct Numerical Method// *ESA Living Planet Symposium*. 27th June - 2nd July, 2010, Bergen, Norway.
9. Dahle C., Flechtner F., Gruber C., Koenig D., Koenig R., Michalak G., Neumayer K.-H. GFZ GRACE Level-2 Processing Standards Document for Level-2 Product Release 0005// *Scientific Technical Report – Data*. – 2012. - Potsdam. – 20 p.
10. Denker H., Paršeliūnas E. Evaluation of the European gravimetric geoid/quasigeoid EGG97 over the Lithuanian territory// *Geodezija ir Kartografija*. – 1999. - Volume 25, Issue 4. – p. 167-173.

11. Disney M., Wallace P. STARLINK// Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society. – 1982. - Volume 23. – p. 485.
12. Ellmann A. Considerations on the further improvements of regional geoid modeling over the Baltic countries// Geodezija ir Kartografija. – 2012. - Volume 36, Issue 1. – p. 5-15.
13. Ellmann A. The geoid for the Baltic countries determined by the least squares modification of Stoke's formula// Doctoral Dissertation in Geodesy. Stocholm: Royal Institute of Technology (KTH), Department of Infrastructure, 2004. - 96 p.
14. Ellmann A., Jürgenson H. Evaluation of a GRACE-based combined geopotential model over the Baltic countries// Geodezija ir Kartografija. – 2008. - Volume 34, Issue 2. – p. 35-44.
15. Eshaga M. Least-squares modification of stokes' formula with EGM08// Geodezija ir Kartografija. – 2009. - Volume 35, Issue 4. – p. 111-117.
16. European Space Agency (ESA). The Hipparcos and Tycho catalogues. - European Space Agency, ESA SP-1200, 1997.
17. Farrell W.E. Deformation of the Earth by surface loads// Reviews of Geophysics. – 1972. - Volume 10, Issue 3. – p. 761–797.
18. Featherstone W.E., Rüeger J.M. The Importance of Using Deviations of the Vertical for the Reduction of Survey Data to a Geocentric Datum// Australian Surveyor. – 2000. - Volume 45, Issue 2. – p. 46-61.
19. Featherstone, W.E. Augmentation of AUSGeoid98 with Grace satellite gravity data// Journal of Spatial Science. – 2007. - Volume 52, Issue 2. – p. 75-86.
20. Featherstone, W.E.; Lichti, D.D. Fitting gravimetric geoid models to vertical deflections// Journal of Geodesy. – 2009. - Volume 83, Issue 6. – p. 583-589.
21. Fjodorovs J. Tehniskā atskaite par II klases nivelēšanu Rīgas objektā. PSRS Ministru padomes Galvenās ģeodēzijas un kartogrāfijas pārvaldes uzņēmums Nr.10. Šifrs 10-03-0023. 1975.-1977.g. -130 lpp.
22. Foerste Ch., Flechtner F., Schmidt R., Stubenvoll R., Rothacher M., Kusche J., Neumayer H., Biancale R., Lemoine J.-M., Barthelmes F., Bruinsma S., Koenig R., Meyer Ul. EIGEN-GL05C - A new global combined high-resolution GRACE-based gravity field model of the GFZ-GRGS cooperation// Geophysical Research Abstracts. – 2008. - Volume 10, EGU2008-A-03426.
23. Förste C., Bruinsma S., Shako R., Marty J-C., Flechtner F., Abrikosov O., Dahle C., Lemoine J.-M., Neumayer H., Biancale R., Barthelmes F., König R., Balmino G. EIGEN-6 - A new combined global gravity field model including GOCE data from the collaboration



- of GFZ-Potsdam and GRGS-Toulouse// Geophysical Research Abstracts. – 2011. - Volume 11, EGU2011-3242-2.
24. Freeden W., Schreiner M. Local multiscale modelling of geoid undulations from deflections of the vertical// Journal of Geodesy. – 2006. - Volume 79, Issue 10-11. – p. 641-651.
  25. Gerstbach G. A Small CCD Zenith Camera (ZC-G1) – Developed for Rapid Geoid Monitoring in Difficult Projects// Proceedings of XIII National Conference of Yugoslavian Astronomy, October 17-20, 2002, University of Belgrade. – p. 221-228.
  26. Gerstbach G. Geoid Monitoring by Zenith Camera and Geology, Geoscientific Cooperation Projects of Austria, Slovakia and Hungary// Conference Proceedings „The role of space methods for present day geodesy”, 2003, Technical University Bratislava. – p. 43-51.
  27. Ghanema E., Jiancheng L., Jingnan L. Models for fitting gravimetric geoids and GPS results// Geo-spatial Information Science. – 2002. - Volume 5, Issue 1. – p. 28-30.
  28. Grafarend E.W. The spherical horizontal and spherical vertical boundary value problem - Vertical deflections and geoidal undulations - The completed Meissl diagram// Journal of Geodesy. – 2001. - Volume 75, Issue 7-8. – p. 363-390.
  29. Halicioglu K., Deniz R., Ozener H. Determination of Astro-Geodetic Vertical Deflections using Digital Zenith Camera System in Istanbul, Turkey// FIG Working Week 2012. 6-10 May 2012, Rome, Italy. / Internets. - [http://www.fig.net/pub/fig2012/papers/ts04b/TS04B\\_halicioglu\\_deniz\\_et\\_al+6017.pdf](http://www.fig.net/pub/fig2012/papers/ts04b/TS04B_halicioglu_deniz_et_al+6017.pdf).
  30. Heineke U., Torge W. Determination of a fine structured astrogeodetic geoid in a tidal flat area of the North Sea// Marine Geodesy. – 1979. - Volume 2, Issue 3. – p. 201-214.
  31. Heiskanen W.A., Moritz H. Physical Geodesy// - New York, London and SanFrancisco: W H Freeman and Co, 1967. - 364 p.
  32. Hirt C., Bürki B. The Digital Zenith Camera – A New High-Precision and Economic Astrogeodetic Observation System for Real-Time Measurement of Vertical Deflections// Proceedings of the 3rd meeting of the international gravity and geoid commission of the international association of geodesy. August 26-30, 2002. Thessaloniki, Greece. - p.161-166.
  33. Hirt C. Monitoring and analysis of anomalous refraction using a digital zenith camera system// Astronomy and Astrophysics. – 2006. - Volume 459. – p. 283–290.
  34. Hirt C. Prediction of vertical deflections from high-degree spherical harmonic synthesis and residual terrain model data// Journal of Geodesy. – 2010. - Volume 84, Issue 3. – p. 179–190.

35. Hirt C. RTM Gravity Forward-Modeling Using Topography/Bathymetry Data To Improve High-Degree Global Geopotential Models In The Coastal Zone// Marine Geodesy. – 2013. - Volume 36, Issue 2. – p. 1-20.
36. Hirt C., Bürki B. Status of Geodetic Astronomy at the Beginning of the 21st Century// Wiss. Arbeiten Geodäsie und Geoinformatik, Universität Hannover. – 2006. - Nr.258. – p. 81-99.
37. Hirt C., Bürki B., Guillaume S., Featherstone W. Digital zenith cameras – state-of-the art astrogeodetic technology for Australian geodesy// FIG Congress 2010. – 2010. Sydney, Australia. Internets. - [http://www.fig.net/pub/fig2010/papers/fs03h/fs03h\\_hirt\\_burki\\_et\\_al\\_3831.pdf](http://www.fig.net/pub/fig2010/papers/fs03h/fs03h_hirt_burki_et_al_3831.pdf)
38. Hirt C., Bürki B., Somieski A., Seeber G. Modern Determination of Vertical Deflections Using Digital Zenith Cameras// Journal of Surveying Engineering. – 2010. - Volume 136, Issue 1. – p. 1-12.
39. Hirt C., Flury J. Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data// Journal of Geodesy. – 2007. - Volume 82, Issue 4-5. – p. 231-248.
40. Hirt C., Marti U., Burki B., Featherstone E. Assessment of EGM2008 in Europe using accurate astrogeodetic vertical deflections and omission error estimates from SRTM/DTM2006.0 residual terrain model data// Journal of geophysical research. – 2010. - Volume 115, Issue B10.
41. Hirt C., Seeber G. Accuracy analysis of vertical deflection data observed with the Hannover digital zenith camera system TZK2-D// Journal of Geodesy. – 2008. - Volume 82, Issue 6. – p. 347–356.
42. Hirt C., Gruber T., Featherstone W.E. Evaluation of the first GOCE static gravity field models using terrestrial gravity, vertical deflections and EGM2008 quasigeoid heights// Journal of Geodesy. – 2011. - Volume 85, Issue 10. – p. 723–740.
43. Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. Physical Geodesy// - Wien: Springer-Verlag, 2005. - 420 p.
44. Høg E., Fabricius C., Makarov V.V., Urban S., Corbin T., Wycoff G., Bastian U., Schwekendiek P, Wicenc A. The Tycho-2 Catalogue of the 2.5 Million Brightest Stars// Astronomy and Astrophysics. – 2000. - Volume 355. – p. 27-30.
45. Jaeggi A., Beutler G., Meyer U., Prange L., Dach R., Mervart L. AIUB-GRACE02S: Status of GRACE Gravity Field Recovery using the Celestial Mechanics Approach// IAG Scientific Assembly 2009. – August 31- September 4, 2009. Buenos Aires, Argentina.

46. Jaeggi, A., Beutler, G., Mervart, L. GRACE Gravity Field Determination using the Celestial Mechanics Approach – First Results// IAG Symposium on "Gravity, Geoid and Earth Observation 2008". June 23-27, 2008, Chania, Greece.
47. Jäger R. DFHRS (Digital FEM Height Reference Surface) – A Rigorous Approach for the Integrated Adjustment and Fitting of Height Reference Surfaces// Forschung aktuell. - Karlsruhe: Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft, 2007. - p. 78-82.
48. Jäger R. Results of the GNSS-Heighting Test-Measurements based on the country-wide Quasi-Geoid „DFHBF\_V1.0 Baltic-Sea-1977 for Moldova“// BMBF-Research and Development Project MOLDPOS. – Chisinau, 19.october, 2010. / Internets. - [http://www.moldpos.eu/files/2ndtum/Results\\_of\\_the\\_GNSS-Heighting\\_Test-Measurements\\_2\\_pages\\_version.pdf](http://www.moldpos.eu/files/2ndtum/Results_of_the_GNSS-Heighting_Test-Measurements_2_pages_version.pdf)
49. Jäger R. State of the art and present developments of a general concept for GPS-based height determination// First workshop on GPS and Mathematical geodesy in Tanzania. October 4, 1999. University College of Lands and Architectural Studies (UCLAS), Dar Es Salaam, Tanzania. / Internets. - [http://www.dfhbf.de/files/JAE\\_GP.PDF](http://www.dfhbf.de/files/JAE_GP.PDF).
50. Jäger R., Kaminskis J., Strauhmanis J., Younis G. Determination of Quasi-geoid as Height Component of the Geodetic Infrastructure for GNSS Positioning Services in the Baltic States// Latvian Journal of Physics and Technical Sciences. – 2012. - Volume 3. – p. 5-15.
51. Jekeli C. An analysis of vertical deflections derived from high-degree spherical harmonic models// Journal of Geodesy. – 1999. - Volume 73, Issue 1. – p. 10-22.
52. Jekeli C., Rapp R. Accuracy of the determination of mean anomalies and mean geoid undulations from a satellite gravity field mapping mission// Department of Geodetic Science and Surveying, Report No. 307. Columbus, Ohio: The Ohio State University, 1980. - 22 p.
53. Jürgenson H. Estonian geoid and other reference surfaces// Geodezija ir Kartografija. – 2002. - Volume 28, Issue 3. – p. 108-111.
54. Jürgenson H., Liibus A., Ellmann A. Geoid profiles in the Baltic Sea determined using GPS and sea level surface// Geodezija ir Kartografija. – 2008. - Volume 34, Issue 4. – p. 109-115.
55. Jürgenson H., Türk K., Randjäv J. Determination and evaluation of the Estonian fitted geoid model EST-GEOID 2003 Geodesy and Cartography. – 2011. - Volume 37, Issue 1. – p. 15-21.
56. Kaminskis J. Latvijas ģeoīda modelis un tā attīstība. Promocijas darbs. Rīga: RTU, 2010. - 150 lpp.

57. Kaminskis J. Geoid Model for Surveying in Latvia// FIG Congress 2010. 11-16 April 2010. Sydney, Australia. / Internets. - [http://www.fig.net/pub/fig2010/papers/fs01c%5Cfs01c\\_kaminskis\\_4066.pdf](http://www.fig.net/pub/fig2010/papers/fs01c%5Cfs01c_kaminskis_4066.pdf)
58. Kaplan G., Hughes J., Seidelmann P., Smith C., Yallop B. Mean and apparent place computations in the new IAU system. III. Apparent, topocentric and astrometric places of planets and stars// The Astronomical Journal. – 1989. - Volume 97, Issue 4. – p. 1197-1210.
59. Kaplan, G. The IAU resolutions on astronomical reference systems, time scales, and earth rotation models explanation and implementation// United States Naval Observatory Circular. – 2005. – No. 459. Washington, D.C.: U.S. Naval Observatory.
60. Kiamehr R. Precise Gravimetric Geoid Model for Iran Based on GRACE and SRTM Data and the Least-Squares Modification of Stokes' Formula with Some Geodynamic Interpretations// Doctoral Dissertation in Geodesy. Stockholm: Royal Institute of Technology (KTH), Department of Infrastructure, 2006. - 89 p.
61. Kiamehr R., Eshagh. EGMLab, a scientific software for determining the gravity and gradient components from global geopotential models// Earth Science Informatics. – 2008. - Volume 1, Number 2. – p. 93-103.
62. Kudryś J. Automatic determination of the deflection of the vertical – first scientific results// Acta Geodynamica et Geomaterialia. – 2009. - Volume 6, Issue 3. – p. 233-238.
63. Kudryś J. Automatic determination of vertical deflection components from GPS and zenithal star observations// Acta Geodynamica et Geomaterialia. – 2007. - Volume 4, Issue 4. – p. 169-172.
64. Liu Q.W., Li Y.C., Sideris M.G. Evaluation of deflections of the vertical on the sphere and the plane: A comparison of FFT techniques// Journal of Geodesy. – 1997. - Volume 71, Issue 8. – p. 461-468.
65. Liu X. Global gravity field recovery from satellite-to-satellite tracking data with the acceleration approach// Publications on Geodesy 68. Delft: Nederlandse Commissie voor Geodesie, 2008. - 226 p.
66. Lyszkowicz A., Krynski J. Improved astrogravimetric geoid in Poland// The 7th International Conference "Environmental Engineering" Selected Papers, May 22-23, 2008, Vilnius, Lithuania. -Volume 3. – p. 1391-1400.
67. Machotka R., Kuruc M., Volařík, T. Local quasigeoid model creation from astrogeodetic measurements// Studia Geophysica et Geodaetica. - 2013. - Volume 57, Issue 1. – p. 27-46.
68. Mayer-Guerr T., Kurtenbach E., Eicker A. The Satellite-only Gravity Field Model ITG-Grace2010s / Internets. - <http://www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace2010>

69. Metzler B., Pail R. GOCE Data Processing: The Spherical Cap Regularization Approach// *Studia Geophysica et Geodaetica*. – 2005. - Volume 49, Issue 4. – p. 441-462.
70. Monet D., Levine S., Canzian B., Ables H., Bird A., Dahn C., Guetter H., Harris H., Henden A., Leggett S., Levison H., Luginbuhl C., Martini J., Monet A., Munn J., Pier J., Rhodes A., Riepe B., Sell S., Stone R., Vrba F., Walker R., Westerhout G., Brucato R.; Reid N.; Schoening W.; Hartley M.; Read M.; Tritton S. The USNO\_B catalog// *The Astronomical Journal*. – 2003. - Volume 125, Issue 2. – p. 984-993.
71. Monet D.G., Dahn C.C. CCD astrometry I: Preliminary results from the KPNO 4-M/CCD parallax program// *The Astronomical Journal*. – 1983. - Volume 88. – p. 1489–1507.
72. Moritz H. Geodetic Reference System 1980// *Journal of Geodesy*. – 2000. - Volume 74, Issue 1. – p. 128-162.
73. Nahavandchi H., Sjöberg L. Unification of vertical datums by GPS and gravimetric geoid models using modified Stokes formula// *Marine Geodesy*. – 1998. - Volume 21, Issue 4. – p. 261-273.
74. Novák P., Vaniček P., Véronneau M., Holmes S., Featherstone W. On the accuracy of modified Stokes's integration in high-frequency gravimetric geoid determination// *Journal of Geodesy*. – 2001. - Volume 74, Issue 9. – p. 644-654.
75. Ogrizovic V. A construction of an advanced measuring system for astro-geodetic determinations// *Publications of Astronomical Observatory Belgrade*. – 2009. - No. 86. – p. 145 – 150.
76. Pail R., Bruinsma S., Migliaccio F., Foerste C., Goiginger H., Schuh W.-D, Hoeck E, Reguzzoni M., Brockmann J.M, Abrikosov O., Veicherts M., Fecher T., Mayrhofer R., Krasbutter I., Sanso F., Tscherning C.C. First GOCE gravity field models derived by three different approaches// *Journal of Geodesy*. – 2011. - Volume 85, Issue 11. – p. 819-843.
77. Paul M.K. A method for evaluating the truncation error coefficients for geoidal heights// *Bull. Geod.* – 1973. - Volume 110. – p. 413-425.
78. Pavlis N., Holmes S., Kenyon S., Factor J. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008// *EGU General Assembly*. April 13-18, 2008. Vienna, Austria.
79. Pavlis N., Holmes S., Kenyon S., Factor J. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)// *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*. – 2012. - Volume 117, Issue B4.
80. Petroškevičius P., Paršeliūnas E. Determination of the Lithuanian territory geoid// *Geodezija ir Kartografija*. – 1995. - Volume 21, Issue 2. – p. 50-58.
81. Polgár Zs., Sujbert L., Földváry L., Asbóth P., Ádám J. Filter design for GOCE gravity gradients// *Geocarto International*. – 2013. - Volume 28, Issue 1. – p. 28-36.

82. Reilly W.I. Gravimetric interpolation of the deflection of the vertical// *New Zealand Journal of Geology and Geophysics*. – 1971. - Volume 14, Issue 1. – p. 109-120.
83. Sas-Uhrynowski A., Mroczek S., Sas A., Petroškevičius P., Obuchowski R., Rimkus D. Establishment of Lithuanian national gravimetric first order network// *Geodezija ir Kartografija*. – 2002. - Volume 28, Issue 3. – p. 75-82.
84. Shen W., Li J., Li J., Wang Z., Ning J., Chao D. Study on recovering the Earth's potential field based on GOCE gradiometry// *Geo-spatial Information Science*. – 2008. - Volume 11, Issue 4. – p. 273-278.
85. Silabriedis G. Eupos-Rīga Geodetic Reference Network and its Multifunctional Application. Doctor's dissertation. -Riga: Riga Technical University, 2012. - 98 lpp.
86. Sjöberg L.E. A general model of modifying Stokes' formula and its least squares solution// *Journal of Geodesy*. – 2003. - Volume 77, Issue 7-8. – p. 459-464.
87. Sjöberg L.E. A solution to the downward continuation effect on the geoid determined by Stokes' formula// *Journal of Geodesy*. – 2003. - Volume 77, Issue 1-2. – p. 94-100.
88. Sjöberg L.E. A spherical harmonic representation of the ellipsoidal correction to the modified Stokes formula// *Journal of Geodesy*. – 2004. - Volume 78, Issue 3. – p. 1432-1394.
89. Sjöberg L.E. Comparison of some methods of modifying Stokes' formula// *Boll. Geod. Sci. Aff.* – 1986. - Volume 46, Issue 2. – p. 229-248.
90. Sjöberg L.E. Least squares modification of Stokes' and Vening Meinesz' formulas by accounting for truncation and potential coefficient errors// *Manuscripta Geodaetica*. – 1984. - Volume 9. – p. 209-229.
91. Sjöberg L.E. Refined least squares modification of Stokes' formula// *Manuscripta Geodaetica*. – 1991. - Volume 16. – p. 367-375.
92. Sjöberg L.E., Nahavandchi H. The atmospheric geoid effects in Stokes' formula// *Geophysical Journal International*. – 2000. - Volume 140. – p. 95-100.
93. Sjöberg L.E. , Hunegnaw A. Some modifications of Stokes' formula that account for truncation and potential coefficient errors// *Journal of Geodesy*. – 2000. - Volume 74, Issue 2. – p. 232-238.
94. Stone R. C. A comparison of digital centering algorithms// *The Astronomical Journal*. – 1989. - Volume 97. – p. 1227–1237.
95. Swenson S.C., Chambers D.P., Wahr J. Estimating geocenter variations from a combination of GRACE and ocean model output// *Journal of Geophysical Research - Solid Earth*. – 2008. - Volume 113, Issue B8. – p. 205-229.

96. Swenson S.C., Wahr J. Post-processing removal of correlated errors in GRACE data// Geophysical Research Letters. – 2006. - Volume 33, Issue 8.
97. Tenzer R., Mikuška J., Marušiak I., Pašteka R., Karcol R., Vajda P., Sirguy P. Computation of the atmospheric gravity correction in New Zealand// New Zealand Journal of Geology and Geophysics. – 1984. - Volume 53, Issue 4. – p. 333-340.
98. Torge W. Geodesy. 2nd Edition. - Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1991. - 245 p.
99. Torge W. Regional gravimetric geoid calculations in the north sea test area// Marine Geodesy. – 1980. - Volume 3, Issue 1-4. – p. 257-271.
100. Tscherning C.C. Geoid modeling using collocation in Scandinavia and Greenland// Marine Geodesy. – 1985. - Volume 9, Issue 1. – p. 1-16.
101. Tscherning C.C., Rapp R. Closed Co variance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree-Variance Models// Department of Geodetic Science and Surveying, Report No. 208. Columbus, Ohio: The Ohio State University, 1974. - 93 p.
102. Wahr J. Time-Variable Gravity from Satellites// Department of Physics and Cooperative Institute for Research in Environmental Sciences. University of Colorado. / Internets. - [http://www.gps.caltech.edu/classes/ge167/file/Wahr\\_Gravity\\_treatise.pdf](http://www.gps.caltech.edu/classes/ge167/file/Wahr_Gravity_treatise.pdf).
103. Wahr J., Molenaar M., Bryan F. Time variability of the Earth's gravity field: Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE// Journal of Geophysical Research. – 1998. - Volume 103, Issue B12. – p. 205-229.
104. Watts A.B., Horai K., Ribe N.M. On the determination of the deflection of the vertical by satellite altimetry// Marine Geodesy. – 1984. - Volume 8, Issue 1-4. – p. 85-127.
105. Wong L., Gore R. Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels// Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. – 1969. - Volume 18. – p. 81-91.
106. Yuanxi Y., Ming Z., Lijie S., Ziqing W., Zhouping W., Guichong O., Bilin X., Xiaoping W., Junqin W. Combined adjustment project of national astronomical geodetic networks and 2000' national GPS control network// Progress in Natural Science. – 2005. - Volume 15, Issue 5. – p. 435-441.
107. Zacharias N., Monet D., Levine S., Urban S., Gaume R., Wycoff G. The Naval Observatory Merged Astrometric Dataset (NOMAD)// – 2005. / Internets. - [www.nofs.navy.mil/nomad](http://www.nofs.navy.mil/nomad).
108. Zacharias N., Zacharias M.I., Urban S.E., Høg E. Comparing tycho-2 astrometry with UCAC1// The Astronomical Journal. – 2000. - Volume 120(2). – p. 1148–1152.

109. Chesi G. Entwicklung einer tragbaren Zenitkammer und ihr Einsatz im 47. Parallel// Dissertation an der Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Universität Graz. - DGK C 287, 1984. - 91 p.
110. Hirt C. Entwicklung und Erprobung eines digitalen Zenitkamarasystems für die hochpräzise Lotabweichungsbestimmung. Ph.D. thesis. Wissen. Arb. der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik an der Universität Hannover Nr. 253, Hannover, 2004. – 188 p. / Internets. - <http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01dh04/393223965.pdf>.
111. Kahlmann T., Hirt C., Ingensand H. Hochpräzise Neigungsmessung mit dem elektronischen Einachspendelsystem HRTM// Ingenieurvermessung 2004. 14th International Conference on Engineering Surveying. 15. – 19. März 2004. Zürich, Deutschland.
112. Seeber G. Die transportable Zenitkamera - ein modernes Instrument zur geographischen Ortsbestimmung// Sterne und Weltraum. – 1978. – Heft2. – p. 45-50.
113. ESA Earthnet Online, GOCE / Internets. - <https://earth.esa.int/web/guest/missions/esa-operational-eo-missions/goce>.
114. DFHRS. Digital finite-element height reference surface / Internets. - <http://dfhbf.de/>.
115. Helmholtz Centre Potsdam, GFZ German Research Centre for Geosciences / Internets. - <http://www.gfz-potsdam.de/portal/gfz/home>.
116. ICGEM International Center for Global Gravity Field Models / Internets. - <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>.
117. Latvijas Ģeotelpiskās informācijas aģentūra / Internets. - <http://www.lgia.gov.lv>.
118. Nordic Geodetic Commission / Internets. - <http://www.nkg.fi/>.
119. The POET interactive browser / Internets. - <http://gracetellus.jpl.nasa.gov/poet/>.
120. U.S. Geological Survey / Internets. - <http://www.usgs.gov>.
121. Universität Bern, Astronomisches Institut / Internets. - [http://www.aiub.unibe.ch/content/index\\_eng.html](http://www.aiub.unibe.ch/content/index_eng.html).